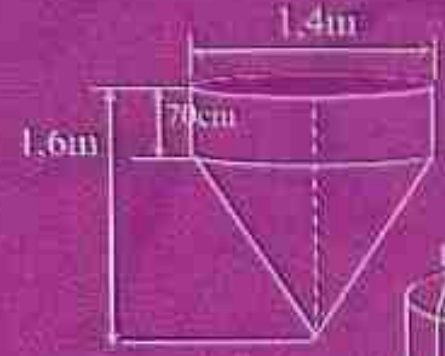
ThS. LÊ ĐỨC

- Bồi dưỡng học sinh khá - giỏi.
- Nâng cao kĩ năng và phương pháp giải các dạng bài tập

Các dạng Toán điển hình

9 ★★



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ ĐỨC

- Biên soạn theo chương trình SGK mới.
- Rèn kĩ năng giải bài tập và luyện thi cuối cấp.

Các dạng Toán điển hình 9 ★★

- Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn
- Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ - Phương trình bậc hai một ẩn
- Góc với đường tròn
- Hình trụ - Hình nón - Hình cầu

ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897
Fax: (04) 39714899
***

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập PHẠM THỊ TRÂM
Biên tập nội dung
THU HIÊN
Sửa bài
LÊ HOÀ
Chế bản
CÔNG TI ANPHA
Trình bày bìa
SƠN KỲ
Đối tác liên kết xuất bản
CÔNG TI ANPHA

SÁCH LIÊN KẾT

CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH 9 - TẬP 2
Mã số: 1L-119ĐH2010
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại công ti TNHH In Song Nguyên
Số xuất bản: 89-2010/CXB/15-03/ĐHQGHN, ngày 15/01/2010
Quyết định xuất bản số: 119LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2010.

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc cuốn sách:

CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH 9 - TẬP 2

Cuốn sách bao gồm 2 phần với 4 chương:

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III – HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Chương IV – HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ – PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

PHẦN HÌNH HỌC

Chương III – GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

Chương IV – HÌNH TRỤ – HÌNH NÓN – HÌNH CẦU

Ở mỗi chương chứa dựng các bài học (chủ đề 1, chủ đề 2, ...) theo nội dung chương trình của sách giáo khoa mới.

Mỗi bài đều được chia thành 4 mục:

A. ***Tóm tắt lí thuyết**: Trình bày có trật tự nội dung kiến thức liên quan.*

B. ***Phương pháp giải toán (hoặc các ví dụ mẫu)***
Gồm các ví dụ được tuyển chọn có chọn lọc nhằm giúp hoàn thiện kiến thức cơ bản và nâng cao kĩ năng giải Toán.

C. ***Bài tập luyện tập***

D. ***Hướng dẫn – Đáp số***

Như vậy, ở mỗi bài:

1. *Với việc trình bày mục tóm tắt lí thuyết, sẽ giúp các em học sinh hiểu rằng cần phải nắm vững những nội dung gì?*
2. *Tiếp đó, tới mục phương pháp giải toán, sẽ giúp các em học sinh hoàn thiện kiến thức.*
3. *Đặc biệt là nội dung của các **chú ý, nhận xét** và **yêu cầu** sau mỗi ví dụ sẽ giúp các em học sinh củng cố những thiết sót và cách nhìn nhận, đánh giá các vấn đề đặt ra.*
4. *Ngoài ra, còn có rất nhiều ví dụ được giải bằng nhiều cách khác nhau sẽ giúp các học sinh trở nên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải.*

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.

Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

- Trung tâm Sách giáo dục Anpha
225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q.5, Tp. HCM.
- Công ti Sách - thiết bị giáo dục ANPHA
50 Nguyễn Văn Săng, Quận Tân Phú, TP.HCM
ĐT: 08.62676463, 38547464.
Email: *alphabookcenter@yahoo.com*
Xin trân trọng cảm ơn!

PHẦN ĐẠI SỐ

CHƯƠNG III – HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

CHỦ ĐỀ 1 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN SỐ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

Phương trình bậc nhất hai ẩn là phương trình có dạng: $ax + by = c$ trong đó:

- a, b, c là hằng số và a, b không đồng thời bằng không.
- x, y là hai ẩn số.

Từ đó, ta có định nghĩa sau:

Nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn là các cặp giá trị $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$,... của hai ẩn số x và y thoả mãn tính chất " *khi thay vào phương trình thì giá trị tương ứng của hai biểu thức ở hai vế của phương trình bằng nhau*".

2. CÁCH GIẢI

Mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn đều có vô số nghiệm. Tập hợp các nghiệm của phương trình được biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ là một đường thẳng, gọi là đường thẳng $ax + by = c$ (mỗi điểm của đường thẳng $ax + by = c$ biểu diễn một cặp nghiệm (x; y) của phương trình).

- *Nếu* $a \neq 0, b \neq 0$ *thì đường thẳng đó là đồ thị hàm số bậc nhất:*

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

- *Nếu* $a = 0, b \neq 0$ *thì đường thẳng đó là đồ thị hàm số:* $y = \frac{c}{b}$

đó là đường thẳng song song với Ox *nếu* $c \neq 0$, *trùng với* Ox *nếu* $c = 0$.

- *Nếu* $a \neq 0, b = 0$ *thì đường thẳng đó có dạng:* $x = \frac{c}{a}$

đó là đường thẳng song song với Oy *nếu* $c \neq 0$, *trùng với* Oy *nếu* $c = 0$.

☞ *Lưu ý*:

1. Đường thẳng $x = \frac{c}{a}$ không phải là đồ thị hàm số.
2. Với yêu cầu giải phương trình $ax + by = c$, ta thường thực hiện ba công việc:
   - Biến đổi để chỉ ra một vài nghiệm cụ thể của phương trình.
   - Viết được công thức nghiệm tổng quát của phương trình.
   - Biểu diễn nghiệm của phương trình trên mặt phẳng toạ độ.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: (Bài 1/tr 7 – Sgk): *Trong các cặp số* (–2 ; 1), (0 ; 2), (–1 ; 0),, (1,5 ; 3) *và* (4 ; –3), *cặp số nào là nghiệm của phương trình*:

a. $5x + 4y = 8$. b. $3x + 5y = -3$.

Giải

Để giải dạng toán này, ta thay các giá trị của cặp số đã cho vào vế trái của biểu thức. Số thứ nhất thay vào biến x, số thứ hai thay vào biến y và tính toán.

- Nếu kết quả có được bằng vế phải thì cặp số đã cho là nghiệm của phương trình.
- Nếu kết quả có được không bằng vế phải thì cặp số đã cho không phải là nghiệm của phương trình.

a. Xét phương trình $5x + 4y = 8$.

- Với cặp số (–2 ; 1). Ta có: $5.(-2) + 4.1 = -6 \neq 8$.
  Do đó, cặp số (–2 ; 1) không phải là nghiệm của phương trình.
- Với cặp số (0 ; 2). Ta có: $5.0 + 4.2 = 8$.
  Do đó, cặp số (0 ; 2) là nghiệm của phương trình.
- Với cặp số (–1 ; 0). Ta có: $5.(-1) + 4.0 = -5 \neq 8$.
  Do đó, cặp số (–1 ; 0) không phải là nghiệm của phương trình.
- Với cặp số (1,5 ; 3). Ta có: $5.1,5 + 4.3 = 19,5 \neq 8$.
  Do đó, cặp số (1,5 ; 3) không phải là nghiệm của phương trình.
- Với cặp số (4 ; –3). Ta có: $5.4 + 4.(-3) = 8$.
  Do đó, cặp số (4 ; –3) là nghiệm của phương trình.

b. Xét phương trình $3x + 5y = -3$.

- Các cặp (–1 ; 0) và (4 ; –3) là nghiệm của phương trình.
- Các cặp (–2 ; 1), (0 ; 2) và (1,5 ; 3) không phải là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2: *Giải phương trình*: $x - 2y = 6$.

Giải

Thực hiện việc biến đổi phương trình về dạng: $x = 2y + 6$.

Tới đây, cho y các giá trị tuỳ ý chúng ta sẽ tính được giá trị tương ứng của x, cụ thể:

- Với $y = -4 \Rightarrow x = 2.(-4) + 6 = -2 \Rightarrow$ cặp (–2, –4) là một nghiệm.
- Với $y = 0 \Rightarrow x = 2.0 + 6 = 6 \Rightarrow$ cặp (6; 0) là một nghiệm.
- ...

Vì y có thể lấy giá trị tuỳ ý, nên phương trình có vô số nghiệm, dạng tổng quát của nghiệm là ($x = 2y + 6, y \in \mathbf{R}$) hoặc viết (2y + 6; y).

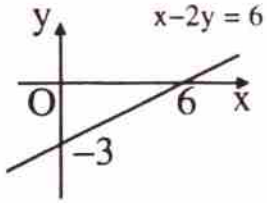
☛ ***Nhận xét***:

1. Vì vai trò của x, y trong phương trình là như nhau nên có thể giải phương trình theo cách:

   Thực hiện việc biến đổi phương trình về dạng: $y = \frac{x-6}{2}$.

   Tới đây, cho x các giá trị tuỳ ý chúng ta sẽ tính được giá trị tương ứng của y, cụ thể:
   - Với $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow$ cặp $(0; -3)$ là một nghiệm.
   - Với $x = 2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow$ cặp $(2; -2)$ là một nghiệm.
   - ...

   Vì x có thể lấy giá trị tuỳ ý, nên phương trình có vô số nghiệm, dạng tổng quát của nghiệm là $(x; \frac{x-6}{2})$.



2. Tập các nghiệm của phương trình:

   $x - 2y = 6 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 3$ là một đường thẳng.

Ví dụ 3: *Giải phương trình*: $0x + 2y = 12$.

✍ *Giải*

Thực hiện việc biến đổi phương trình về dạng: $2y = 12 \Leftrightarrow y = 6$

Tới đây, cho x các giá trị tuỳ ý ta luôn nhận được $y = 6$, do đó các cặp số $(-81; 6)$, $(33; 6)$, ... đều là nghiệm của phương trình.

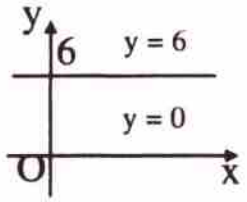
Vậy, phương trình có vô số nghiệm, dạng tổng quát của nghiệm là $(x \in \mathbf{R}; y = 6)$ hoặc viết $(x; 6)$.

☛ ***Nhận xét***:

1. Vì hệ số của x trong phương trình bằng 0 nên không thể giải phương trình theo x được.
2. Tập các nghiệm của phương trình:

   $0x + 2y = 12$

   $\Leftrightarrow y = 6$ là một đường thẳng song song với Ox và cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 6.



Tổng quát: Phương trình $y = m$ có vô số nghiệm dạng (x, m), biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ là đường thẳng song song với Ox và cắt Oy tại điểm có tung độ bằng m nếu $m \neq 0$, trùng với Ox nếu $m = 0$.

Ví dụ 4: *Giải phương trình*: $6x - 0y = 18$.

✍ *Giải*

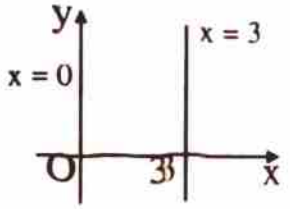
Thực hiện việc biến đổi phương trình về dạng: $6x = 18 \Leftrightarrow x = 3$.

Tới đây, cho y các giá trị tuỳ ý ta luôn nhận được $x = 3$, do đó các cặp số $(3; 2005)$, $(3; 1989)$, ... đều là nghiệm của phương trình.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm, dạng tổng quát của nghiệm là (3; y ∈ **R** hoặc viết (3; y).

☛ ***Nhận xét***:

1. Vì hệ số của y trong phương trình bằng 0 nên không thể giả phương trình theo y được.
2. Tập các nghiệm của phương trình:
   $6x - 0y = 18$
   $\Leftrightarrow x = 3$ là một đường thẳng song song với Oy và cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng 3.



Tổng quát: Phương trình x = n có vô số nghiệm dạng (n; y), biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ là đường thẳng song song với Oy và cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng n nếu $n \neq 0$, trùng với Oy nếu n = 0.

Ví dụ 5: (Bài 1/tr 7 – Sgk): *Cho hai phương trình* $x + 2y = 4$ *và* $x - y = 1$. *Vẽ hai đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của hai phương trình đó trên cùng một hệ toạ độ. Xác định toạ độ giao điểm của hai đường thẳng và cho biết toạ độ của nó là nghiệm của các phương trình nào.*

✍ *Giải – Học sinh tự vẽ hình*

Ta có:

- Đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình $x + 2y = 4$ đi qua hai điểm A(0 ; 2) và B(4 ; 0).
- Đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của phương trình $x - y = 1$ đi qua hai điểm C(0 ; –1) và B(1 ; 0).

Từ đồ thị hàm số, dễ dàng nhận thấy hai đường thẳng AB và CD giao nhau tại điểm M(2 ; 1).

Vì M ∈ AB và M ∈ CD nên toạ độ của M là nghiệm của cả hai phương trình $x + 2y = 4$ và $x - y = 1$.

Ví dụ 6: *Tìm nghiệm nguyên của các phương trình*:

a. $x - 3y = 4$. b. $3x + y = 6$. c. $4x - 5y = 8$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi phương trình về dạng: $x = 3y + 4$.
Nhận xét rằng, với $\forall y \in \mathbf{Z}$, ta luôn có $x = 3y + 4 \in \mathbf{Z}$.
Vậy, phương trình có vô số nghiệm nguyên thoả mãn $(3y + 4; y)$ với $y \in \mathbf{Z}$.

b. Biến đổi phương trình về dạng: $y = -3x + 6$.
Nhận xét rằng, với $\forall x \in \mathbf{Z}$, ta luôn có $y = -3x + 6 \in \mathbf{Z}$.
Vậy, phương trình có vô số nghiệm nguyên thoả mãn $(x; 6 - 3x)$ với $x \in \mathbf{Z}$.

c. Biến đổi phương trình về dạng:

$$4x = 5y + 8 \Leftrightarrow x = \frac{5y}{4} + 2 = y + 2 + \frac{y}{4}. \qquad (1)$$

Đặt $k = \frac{y}{4}$, $k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow y = 4k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Thay $y = 4k$ vào (1), ta được: $x = (4k + 2) + k = 5k + 2$.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm nguyên thoả mãn $(5k + 2; 4k)$ với $k \in \mathbf{Z}$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, qua ví dụ trên chúng ta đã biết được một phương pháp tìm nghiệm nguyên của một phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ví dụ 7: *Cho đường thẳng* (d): $mx - (m + 4)y = m$.

1. *Tìm* m *để đường thẳng* (d):
   a. *Cắt hai trục toạ độ tại hai điểm phân biệt.*
   b. *Song song với* Ox.
   c. *Song song với* Oy.
   d. *Song song với đường thẳng* (Δ): $x + y = 6$.
2. *Chứng minh rằng khi* m *thay đổi, đường thẳng* (d) luôn *đi qua một điểm cố định.*

✍ *Giải*

1. Với đường thẳng (d), ta có $a = m$, $b = -(m + 4)$ và $c = m$.

a. Để (d) cắt cả hai trục toạ độ điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -(m+4) \neq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -4 \end{cases}.$$

Vậy, với $m \neq 0$ và $m \neq -4$, thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Để (d) song song với Ox điều kiện là:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -(m+4) \neq 0 \\ m \neq 0 \end{cases}, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại m để (d) song song với Ox.

c. Để (d) song song với Oy điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \\ c \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -(m+4) = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4.$$

Vậy, với $m = -4$, thoả mãn điều kiện đầu bài.

d. Viết lại phương trình hai đường thẳng (d) và (Δ) dưới dạng:

$$(d): y = \frac{m}{m+4}x - \frac{m}{m+4}, \text{ với } m \neq -4$$

$$(\Delta): y = -x + 6$$

Khi đó, để (d) song song với đường thẳng (Δ) điều kiện là:

$$\frac{m}{m+4} = -1 \Leftrightarrow m = -m - 4 \Leftrightarrow 2m = -4 \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy, với $m = -2$, thoả mãn điều kiện đầu bài.

2. Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua

$\Leftrightarrow mx_0 - (m+4)y_0 = m, \forall m \Leftrightarrow m(x_0 - y_0 - 1) - 4y_0 = 0, \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 - 1 = 0 \\ -4y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}.$$

Vậy, đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định M(1; 0).

Ví dụ 8: a. *Lập công thức tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng* $ax + by + c = 0$.

b. *Áp dụng, tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng* $3x - 4y = 10$.

Giải

a. Ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$.

Khi đó, đường thẳng có dạng: $by + c = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{c}{b}$ do đó, khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng bằng $\left|-\frac{c}{b}\right| = \left|\frac{c}{b}\right|$.

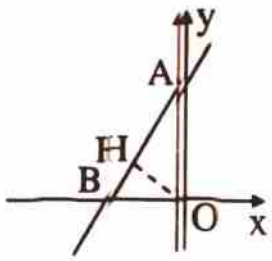
Trường hợp 2: Nếu $a \neq 0$ và $b = 0$.

Khi đó, đường thẳng có dạng: $ax + c = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{c}{a}$ do đó, khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng bằng $\left|-\frac{c}{a}\right| = \left|\frac{c}{a}\right|$.

Trường hợp 3: Nếu $a, b \neq 0$.

Gọi A, B theo thứ tự là giao điểm của (d) với các trục Oy, Ox, ta được:

- Với điểm A: $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b}$, do đó $A(0, \frac{c}{b})$.
- Với điểm B: $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$, do đó $B(-\frac{c}{a}, 0)$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d).

Trong ΔOAB vuông tại O, ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$

$$\Leftrightarrow OH = \frac{OA.OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}} = \frac{\left|\frac{c}{b}\right| \cdot \left|-\frac{c}{a}\right|}{\sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(-\frac{c}{a}\right)^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (*)$$

b. Gọi h là khoảng cách từ O đến đường thẳng, ta có ngay: $h = \frac{|-10|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2$.

☞ ***Nhận xét***: Công thức (*) vẫn đúng trong trường hợp 1 và trường hợp 2.

Ví dụ 9: *Cho hai đường thẳng:*

(d_1): $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $(a_1, b_1 \neq 0)$.

(d_2): $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ $(a_2, b_2 \neq 0)$.

Chứng minh rằng:

a. (d_1) *và* (d_2) *cắt nhau khi* $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

b. (d_1) *và* (d_2) *song song với nhau khi* $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

c. (d_1) *và* (d_2) *trùng nhau khi* $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

✍ *Giải*

Như ta đã học ở phần trước, với hai đường thẳng:

(d_1): $y = m_1x + n_1$ và (d_2): $y = m_2x + n_2$

ta có, các kết quả:

- $(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow m_1 = m_2$ và $n_1 \neq n_2$.
- $(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow m_1 = m_2$ và $n_1 = n_2$.
- $(d_1) \cap (d_2) = \{A\} \Leftrightarrow m_1 \neq m_2$.

Viết lại các đường thẳng dưới dạng:

$$(d_1): y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} \text{ và } (d_2): y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2}$$

a. (d_1) và (d_2) cắt nhau khi:

$$-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}, \text{ đpcm.}$$

b. (d_1) và (d_2) song song với nhau khi:

$$\begin{cases} -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \\ \frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \\ \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}, \text{ đpcm.}$$

c. (d_1) và (d_2) trùng nhau khi:

$$\begin{cases} -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \\ \frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \\ \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}, \text{ đpcm.}$$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a. $4x - y = 1$.
b. $x + 2y = 0$.
c. $0x + 2y = 6$.
d. $3x - 0y = 12$.

Bài 2: Vẽ các đường thẳng có phương trình sau:

a. $3x - 4y = 12$.
b. $3x - 2y = 0$.
c. $0x - y = 2$.
d. $2x - 0y = -4$.

Bài 3: Kiểm tra xem trong các cặp số: $(3, -1)$, $(\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$, $(81, -80)$., $(2, 1)$. cặp số nào là nghiệm của phương trình $x + y = 1$.

Bài 4: Đường thẳng $2x - y = -4$ đi qua điểm nào trong các điểm sau:

$$A(2, 4),\ B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 4 + \sqrt{2}\right),\ C(1, -2),\ D\left(\frac{1}{\sqrt{3} - 2}, -2\sqrt{3}\right).$$

Bài 5: Cho đường thẳng (d): $mx + 2y = 4$.

1. Vẽ đường thẳng khi $m = 2$.
2. Tìm m để đường thẳng (d):
   a. Cắt hai trục toạ độ tại hai điểm phân biệt.
   b. Song song với Ox.
   c. Song song với Oy.
   d. Song song với đường thẳng (Δ): $x + y = 6$.
   e. Có hướng đi lên.
   f. Có hướng đi xuống.
3. Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 6: Chứng minh rằng khi m thay đổi, các đường thẳng sau luôn đi qua một điểm cố định.

a. $3x + m(y - 1) = 2$.
b. $mx + (m - 2)y = m$.
c. $m(x - 5) - 2y = 6$.
d. $mx - 2y = 6$.

Bài 7: Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

a. $2x + y = 4$.
b. $x - 7y = 9$.
c. $x - 2y = 3$.
d. $3x - 2y = 4$.
e. $3x + y = 8$.
f. $x - 2y = 3$.

Bài 8: Tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến các đường thẳng:

a. $4x + 3y + 20 = 0$.
b. $2x - y = 4$.
c. $3x = 2$.
d. $-2y = 1$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: *Đề nghị học sinh tự làm phần biểu diễn bằng đồ thị.*

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$y = 4x - 1$$

suy ra, các cặp số $(1, 3)$, $(0, -1)$, ...là nghiệm của phương trình.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm, với dạng tổng quát $(x, 4x-1)$.

b. Biến đổi phương trình về dạng: $x = -2y$
suy ra, các cặp số (0, 0), (–4, 2), ...là nghiệm của phương trình.
Vậy, phương trình có vô số nghiệm, với dạng tổng quát (–2y, y).

c. Biến đổi phương trình về dạng: $2y = 6 \Leftrightarrow y = -3$
suy ra, các cặp số (0, 3), (81, 3), ...là nghiệm của phương trình.
Vậy, phương trình có vô số nghiệm, với dạng tổng quát (x, 3).

d. Biến đổi phương trình về dạng: $3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$
suy ra, các cặp số (4, 33), (4, 89), ...là nghiệm của phương trình.
Vậy, phương trình có vô số nghiệm, với dạng tổng quát (4, y).

Bài 2: *Học sinh tự làm.*

Bài 3: Ta lần lượt xét:

- Thay (3, –1) vào phương trình, ta được: $3 + (-1) = 1 \Leftrightarrow 2 = 1$, mâu thuẫn.

Vậy, cặp (3, –1) không phải là nghiệm của phương trình.

- Thay $(\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ vào phương trình, ta được: $\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$, đúng.

Vậy, cặp $(\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ là nghiệm của phương trình.

- Thay (81, –80) vào phương trình, ta được: $81 + (-80) = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$, đúng.

Vậy, cặp (81, –80) là nghiệm của phương trình.

- Thay (2, 1). vào phương trình, ta được: $2 + 1 = 1 \Leftrightarrow 3 = 1$, mâu thuẫn.

Vậy, cặp (2, 1) không phải là nghiệm của phương trình.

Bài 4: Ta lần lượt xét:

- Thay A(2, 4) vào phương trình đường thẳng, ta được:

$$2.2 - 4 = -4 \Leftrightarrow 0 = -4, \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy, đường thẳng không đi qua điểm A.

- Thay $B(\frac{1}{\sqrt{2}}, 4 + \sqrt{2})$ vào phương trình đường thẳng, ta được:

$$2.\frac{1}{\sqrt{2}} - (4 + \sqrt{2}) = -4 \Leftrightarrow -4 = -4, \text{ đúng.}$$

Vậy, đường thẳng đi qua điểm B.

- Thay C(1, –2) vào phương trình đường thẳng, ta được:

$$2.1 - (-2) = -4 \Leftrightarrow 4 = -4, \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy, đường thẳng không đi qua điểm C.

- Thay $D(\frac{1}{\sqrt{3}-2}, -2\sqrt{3})$ vào phượng trình đường thẳng, ta được:

$$2.\frac{1}{\sqrt{3}-2} - (-2\sqrt{3}) = -4 \Leftrightarrow 2.\frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} + 2\sqrt{3} = -4$$

$$\Leftrightarrow -2(\sqrt{3} + 2) + 2\sqrt{3} = -4 \Leftrightarrow -4 = -4, \text{ đúng.}$$

Vậy, đường thẳng đi qua điểm D.

Bài 5:: Giả sử M $(x_0 ; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua:

$$\Leftrightarrow mx_0 + 2y_0 = 4, \forall m \Leftrightarrow mx_0 + 2y_0 - 4 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ 2y_0 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow M(0 ; 2).$$

CHỦ ĐỀ 2

HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN SỐ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình là tìm tất cả các cặp số (x ; y) là nghiệm chung của hai phương trình.

2. NGHIỆM VÀ SỐ CÁC NGHIỆM CỦA HỆ – MINH HOẠ BẰNG ĐỒ THỊ

Với hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

- Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.
- Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.
- Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Định nghĩa: Hai hệ phương trình được gọi là tương đương nếu mọi nghiệm của hệ này đều là nghiệm của hệ kia và ngược lại.

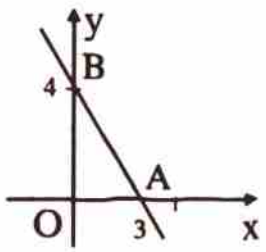
Phép biến đổi từ một hệ phương trình đến một hệ phương trình khác tương đương với nó được gọi là phép biến đổi tương đương.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Giải hệ phương trình sau bằng đồ thị:*

$$\begin{cases} 4x + 3y = 12 \\ 8x + 6y = 24 \end{cases}.$$

Giải



Trước tiên, ta vẽ hai đường thẳng $4x + 3y = 12$ và $8x + 6y = 24$, đó chính là đồ thị của hàm số $y = -\dfrac{4}{3}x + 4$.

Để vẽ đồ thị ta lấy 2 điểm A(0, 4) và B(3, 0).

Hai đường thẳng trùng nhau nên có vô số điểm chung. Vậy, hệ có vô số nghiệm, mỗi nghiệm là toạ độ (x, y) của một điểm trên đường thẳng $4x + 3y = 12$.

Ví dụ 2: (Bài 4/tr 11 – Sgk): *Không cần vẽ hình, hãy cho biết số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau đây và giải thích vì sao ?*

a. $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ y = 3x - 1 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$.

c. $\begin{cases} 2y = -3x \\ 3y = 2x \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - \frac{1}{3}y = 1 \end{cases}$

Giải

a. Xét các phương trình trong hệ, ta có:

- Đường thẳng $y = 3 - 2x$ có hệ số góc $a_1 = -2$.
- Đường thẳng $y = 3x - 1$ có hệ số góc $a_2 = 3$.

Vì $a_1 \neq a_2$ nên hai đường thẳng này cắt nhau.
Vậy hệ có một nghiệm duy nhất.

b. Xét các phương trình trong hệ, ta có:

- Đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 3$ có hệ số góc $a_1 = -\frac{1}{2}$.
- Đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 1$ có hệ số góc $a_2 = -\frac{1}{2}$.

Vì $a_1 = a_2$ nên hai đường thẳng này song song với nhau.
Vậy hệ vô nghiệm.

c. Xét hệ: $\begin{cases} 2y = -3x \\ 3y = 2x \end{cases}$

Ta có:

- Đường thẳng $y = -\frac{3}{2}x$ có hệ số góc $a_1 = -\frac{3}{2}$.
- Đường thẳng $y = \frac{2}{3}x$ có hệ số góc $a_2 = \frac{2}{3}$.

Vì $a_1.a_2 = -1$ nên hai đường thẳng này vuông góc với nhau.
Vậy hệ có một nghiệm duy nhất. Dễ thấy nghiệm đó là (0 ; 0).

d. Xét hệ: $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - \frac{1}{3}y = 1 \end{cases}$

Ta có:

- Đường thẳng $3x - y = 3 \Leftrightarrow y = 3x - 3$.
- Đường thẳng $x - \frac{1}{3}y = 1 \Leftrightarrow y = 3x - 3$.

Ta thấy hai đường thẳng này trùng nhau.

Vậy hệ có vô số nghiệm.

Ví dụ 3: *Hãy xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau (minh hoạ bằng đồ thị):*

a. $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases}$. b. $\begin{cases} x - y = 8 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 4 \end{cases}$. c. $\begin{cases} 3x + 6y = 6 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$.

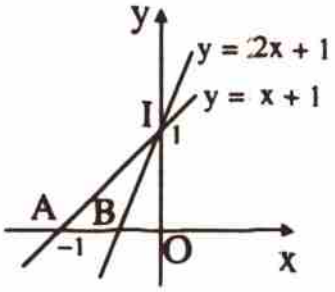
Giải

a. Nhận xét rằng:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{1} = 2 \text{ và } \frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hệ có nghiệm duy nhất (0; 1).

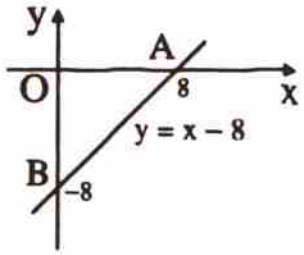


b. Nhận xét rằng:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{1/2} = 2 \text{ và } \frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-1/2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = 2 = \frac{c_1}{c_2}.$$

Vậy, hệ có vô số nghiệm.

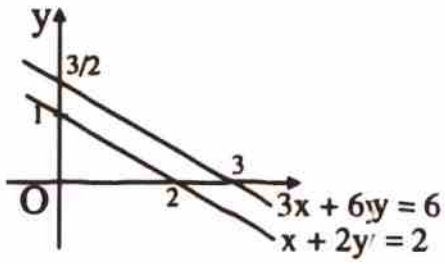


c. Nhận xét rằng:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{1} = 3 \text{ và } \frac{b_1}{b_2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = 3 \neq \frac{c_1}{c_2} = 2.$$

Vậy, hệ vô nghiệm.



Ví dụ 4: *Hãy xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau (minh hoạ bằng đồ thị):*

a. $\begin{cases} 4x + 0y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$. b. $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 0x - y = -2 \end{cases}$.

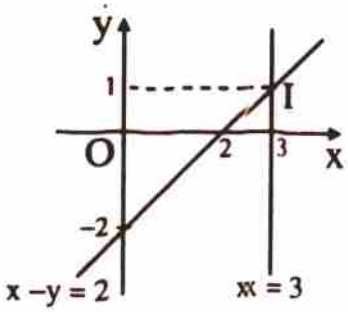
Giải

a. Nhận xét rằng:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{1} = 4 \text{ và } \frac{b_1}{b_2} = \frac{0}{-1} = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hệ có nghiệm duy nhất là: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$.

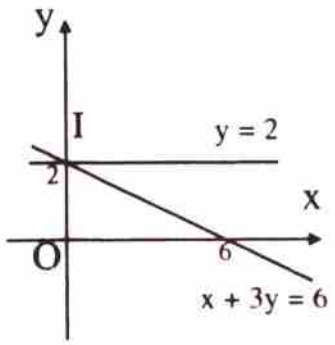


b. Nhận xét rằng:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{0} = \infty \text{ và } \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{-1} = -3 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hệ có nghiệm duy nhất (0; 2).



Ví dụ 5: *Chứng tỏ rằng hệ phương trình:* $\begin{cases} ax - y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$.

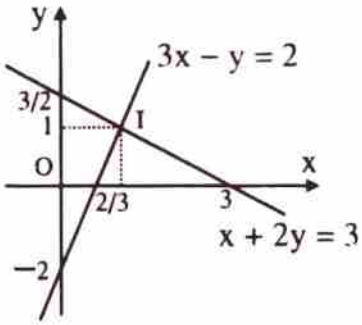
a. *Có nghiệm duy nhất với* $a = 3$.

b. *Vô nghiệm với* $a = -\frac{1}{2}$.

Hãy minh hoạ bằng đồ thị.

Giải

a. Với $a = 3$, hệ phương trình có dạng: $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$.



Nhận xét rằng:

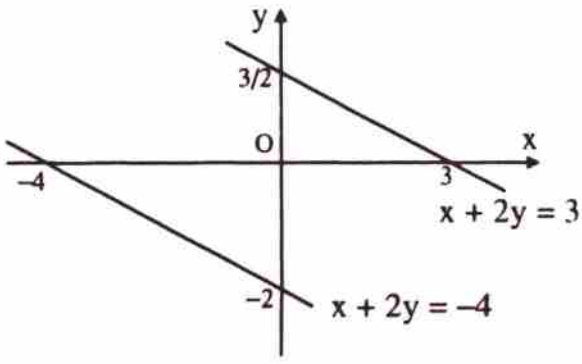
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{1} = 3 \text{ và } \frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hệ có nghiệm duy nhất là:

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

b. Với $a = -\frac{1}{2}$, hệ phương trình có dạng:



$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x - y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}.$$

Nhận xét rằng:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{-1/2}{1} = -\frac{1}{2} \text{ và } \frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = -\frac{1}{2} \neq \frac{c_1}{c_2} = \frac{2}{3}.$$

Vậy, hệ vô nghiệm.

Ví dụ 6: *Cho hệ phương trình:* $\begin{cases} a_1x + y = b \\ a_2x + y = b \end{cases}$.

a. *Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm với mọi* a_1, a_2, b *bất kì.*

b. *Hệ có thể có vô số nghiệm được không ?*

ABC

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/ 3050

Giải

a. Biến đổi hệ về dạng: $\begin{cases} y = -a_1 x + b & (d_1) \\ y = -a_2 x + b & (d_2) \end{cases}$

Nhận xét rằng, hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ứng với hai phương trình trong hệ luôn cắt trục Oy (vì có hệ số tự do bằng nhau) tại điểm I(0, b).

Vậy, hệ phương trình luôn có nghiệm (0, b) với mọi a_1, a_2, b bất kì.

b. Hệ có vô số nghiệm khi: $(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$.

Ví dụ 7: *Sử dụng ba định lí đã biết tìm ba hệ phương trình tương đương với hệ sau:* $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$.

Giải

Ta lần lượt:

1. Sử dụng định lí 1, ta được: $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$.

2. Sử dụng định lí 2, ta được:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ (x - y) - (x - 3y) = 2 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ 2y = -6 \end{cases}.$$

3. Sử dụng định lí 3, ta được:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ (y + 2) - 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ -2y = 6 \end{cases}.$$

☞ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên, khi sử dụng định lí 2 và định lí 3 nếu chúng ta chỉ cần sử dụng thêm một lần nữa định lí 3 sẽ thu được nghiệm của hệ.

Ví dụ 8: *Giải thích tại sao hai hệ phương trình sau tương đương:*

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = \frac{3}{5} \end{cases}.$$

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi tương đương:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases} \overset{+}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 5y = 3 \end{cases} \overset{:5}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = \frac{3}{5} \end{cases}.$$

Cách 2: Sử dụng định nghĩa:

- Giải hệ thứ nhất, ta được nghiệm duy nhất (2, 1).
- Giải hệ thứ hai, ta được nghiệm duy nhất (2, 1).

Vậy, hai hệ phương trình là tương đương.

☛ ***Nhận xét***: Tới đây, chúng ta có thể khẳng định được rằng với hai hệ phương trình tương đương trong trường hợp có nghiệm duy nhất luôn tồn tại hai cách chứng minh (sử dụng các phép biến đổi tương đương và sử dụng định nghĩa).

Ví dụ 9: *Giải thích tại sao hai hệ phương trình sau tương đương*:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3x + 6y = 6 \\ 4x + 8y = 8 \end{cases}.$$

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi tương đương: $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases} \overset{\times 3}{\underset{\times 2}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 3x + 6y = 6 \\ 4x + 8y = 8 \end{cases}$.

Cách 2: Sử dụng định nghĩa:

- Giải hệ thứ nhất, ta thấy hệ có vô số nghiệm thoả mãn (2 – 2y, y).
- Giải hệ thứ hai, ta thấy hệ có vô số nghiệm thoả mãn (2 – 2y, y).

Vậy, hai hệ phương trình là tương đương.

☛ ***Nhận xét***: Tới đây, chúng ta có thể khẳng định được rằng với hai hệ phương trình tương đương trong trường hợp có vô số nghiệm luôn tồn tại hai cách chứng minh (sử dụng các phép biến đổi tương đương và sử dụng định nghĩa).

Ví dụ 10: *Giải thích tại sao các cặp hệ phương trình sau tương đương*:

a. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ và $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 12 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases}$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi tương đương: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \overset{}{\underset{\times 3}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 12 \end{cases}$.

Cách 2: Sử dụng định nghĩa:

- Giải hệ thứ nhất, ta thấy hệ vô nghiệm.
- Giải hệ thứ hai, ta thấy hệ vô nghiệm.

Vậy, hai hệ phương trình là tương đương.

b. Ta thực hiện:

- Giải hệ thứ nhất, ta thấy hệ vô nghiệm.
- Giải hệ thứ hai, ta thấy hệ vô nghiệm.

Vậy, hai hệ phương trình là tương đương.

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, với hai hệ phương trình tương đương trong trường hợ vô nghiệm cách tốt nhất là sử dụng định nghĩa để chứng minh.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Hãy xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau (minh hoạ bằng đồ thị)

a. $\begin{cases} x-3y=2 \\ 2x+y=2 \end{cases}$. b. $\begin{cases} 4x-3y=0 \\ 3x+4y=0 \end{cases}$.

Bài 2: Hãy xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau (minh hoạ bằng đồ thị)

a. $\begin{cases} x-3y=6 \\ 3x-9y=3 \end{cases}$. b. $\begin{cases} x-y=6 \\ 3x-3y=18 \end{cases}$.

Bài 3: Hãy xác định số nghiệm của các hệ phương trình sau (minh hoạ bằng đồ thị)

a. $\begin{cases} x-0y=2 \\ 0x+4y=8 \end{cases}$. b. $\begin{cases} 0x+6y=24 \\ x-2y=1 \end{cases}$.

Bài 4: Bằng đồ thị, chứng tỏ rằng hệ phương trình: $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 2x-ay=-3 \end{cases}$.

a. Có nghiệm duy nhất với a = 2.

b. Vô nghiệm với $a=\frac{2}{3}$.

Bài 5: Bằng đồ thị, chứng tỏ rằng hệ phương trình: $\begin{cases} x+2y=a \\ 2x+4y=6 \end{cases}$.

a. Có vô số nghiệm với a = 3.

b. Vô nghiệm với $a \neq 3$.

Bài 6: Bằng đồ thị, chứng tỏ rằng các hệ phương trình sau luôn có nghiệm duy nhất

a. $\begin{cases} x+2y=9 \\ x=n \end{cases}$. b. $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ y=m \end{cases}$.

Bài 7: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} a^2x-y=b \\ 2ax-y=b \end{cases}$.

a. Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm với mọi a, b bất kì.

b. Hệ có nghiệm duy nhất khi nào ?

c. Hệ có vô số nghiệm khi nào ?

Bài 8: Xác định a để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \\ ax - y = -3 \end{cases}$.

Minh hoạ bằng đồ thị.

Bài 9: Sử dụng ba định lí đã biết tìm ba hệ phương trình tương đương với mỗi hệ sau:

a. $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3x + 8y = 5 \end{cases}$. b. $\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$.

Bài 10: Giải thích tại sao các cặp hệ phương trình sau tương đương:

a. $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ và $\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ y = 1 \end{cases}$. b. $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ và $\begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ y = 2 \end{cases}$.

Bài 11: Giải thích tại sao các cặp hệ phương trình sau tương đương:

a. $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 6x - 9y = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} 4x - 6y = 2 \\ x - \frac{3}{2}y = \frac{1}{2} \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 10x + 15y = 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \\ 4x + 6y = \frac{4}{5} \end{cases}$.

c. $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} 8x + 9y = 11 \\ 16x + 18y = 3 \end{cases}$.

Bài 12: Tìm giá trị của m để các cặp hệ phương trình sau tương đương:

a. $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = m \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3mx + (m^2 + 8)y = 4m + 2 \end{cases}$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: *Học sinh tự vẽ hình.*

a. $x = \frac{8}{7}$ và $y = -\frac{2}{7}$. b. $x = 0$ và $y = 0$.

Bài 2: *Học sinh tự vẽ hình.*

a. Vô nghiệm. b. Vô số nghiệm dạng $(x, x-6)$.

Bài 3: *Học sinh tự vẽ hình.*

b. $x = 2$ và $y = 2$. b. $x = 9$ và $y = 4$.

Bài 4: *Học sinh tự vẽ hình.*

a. Với a = 2, hệ phương trình có dạng: $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x - 2y = -3 \end{cases}$.

Nhận xét rằng $\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{2}$ và $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất là $x = \frac{5}{4}$, $y = \frac{11}{4}$.

b. Với $a = \frac{2}{3}$, hệ phương trình có dạng: $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x - \frac{2}{3}y = -3 \end{cases}$.

Nhận xét rằng $\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{2}$ và $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-2/3} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{2} \neq \frac{c_1}{c_2} = -\frac{1}{3}$.

Vậy, hệ vô nghiệm.

Bài 5: Tham khảo bài tập 4.

Bài 6: *Học sinh tự vẽ hình.*

a. Ta nhận xét về sự cắt nhau của hai đường thẳng x + 2y = 9 (đường xiên)) và x = (song song với Oy).

Vậy, hệ luôn có nghiệm duy nhất x = n và $y = \frac{1}{2}(9 - n)$.

b. Ta nhận xét về sự cắt nhau của hai đường thẳng 3x – 2y = 8 (đường xiên) và y = (song song với Ox). Vậy, hệ luôn có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{3}(2m + 8)$ và y = m.

Bài 7:

a. Biến đổi hệ về dạng: $\begin{cases} y = a^2x + b & (d_1) \\ y = 2ax + b & (d_2) \end{cases}$.

Nhận xét rằng, hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ứng với hai phương trình trong hệ luô cắt trục Oy (vì có hệ số tự do bằng nhau) tại điểm I(0, b).

Vậy, hệ phương trình luôn có nghiệm (0, b) với mọi a, b bất kì.

b. Hệ có nghiệm duy nhất khi:

$$(d_1) \text{ cắt } (d_2) \Leftrightarrow a^2 \neq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a \neq 0 \Leftrightarrow a(a-2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 2 \end{cases}$$

c. Hệ có vô số nghiệm khi:

$$(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow \Leftrightarrow a^2 = 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow a(a-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}.$$

Bài 8: Ta kí hiệu: $\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ x + y = 2 & (2) \\ ax - y = -3 & (3) \end{cases}$.

Xét hệ phương trình tạo bởi (1) và (2) là: $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$. (*)

Để hệ có nghiệm, điều kiện là (*) phải thoả mãn phương trình (3), tức là:

a.1 − 1 = −3 ⇔ a = −2.

Vậy với a = −2 hệ có nghiệm.

Bài 9: *Học sinh tự làm.*

Bài 10:

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi tương đương:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \underset{\times 2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases} \overset{-}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Cách 2: Sử dụng định nghĩa:

- Giả hệ thứ nhất, ta được nghiệm duy nhất (2, 1).
- Giả hệ thứ hai, ta được nghiệm duy nhất (2, 1).

Vậy, hai hệ phương trình là tương đương.

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi tương đương:

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \underset{\times 3}{\overset{\times 2}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ 6x + 9y = 18 \end{cases} \overset{-}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ 7y = 14 \end{cases} \underset{7}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Cách 2: Sử dụng định nghĩa:

- Giả hệ thứ nhất, ta được nghiệm duy nhất (0, 2).
- Giả hệ thứ hai, ta được nghiệm duy nhất (0, 2).

Vậy, hai hệ phương trình là tương đương.

Bài 11:

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi tương đương: $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 6x - 9y = 3 \end{cases} \underset{6}{\overset{\times 2}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 4x - 6y = 2 \\ x - \frac{3}{2}y = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Cách 2: Sử dụng định nghĩa:

- Giả hệ thứ nhất, ta thấy hệ có vô số nghiệm thoả mãn $(x, \frac{2x-1}{3})$.
- Giả hệ thứ hai, ta thấy hệ có vô số nghiệm thoả mãn $(x, \frac{2x-1}{3})$.

Vậy, hai hệ phương trình là tương đương.

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện phép biến đổi tương đương: $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ 10x+15y=2 \end{cases} \overset{\times\frac{1}{6}}{\overset{\times\frac{2}{5}}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1 \\ 4x+6y=\frac{4}{5} \end{cases}$.

Cách 2: Sử dụng định nghĩa:

- Giải hệ thứ nhất, ta thấy hệ vô nghiệm.
- Giải hệ thứ hai, ta thấy hệ vô nghiệm.

Vậy, hai hệ phương trình là tương đương.

c. Ta lần lượt:

- Giải hệ thứ nhất, ta thấy hệ vô nghiệm.
- Giải hệ thứ hai, ta thấy hệ vô nghiệm.

Vậy, hai hệ phương trình là tương đương.

Bài 12:

a. Giải hệ thứ nhất, ta được nghiệm duy nhất $x = 2$ và $y = 1$.

Do đó, muốn hai hệ tương đương thì (2, 1) cũng phải là nghiệm của hệ còn lại, tức là:

$$\begin{cases} 2+1=3 \\ 2.2-1=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=3 \\ m=3 \end{cases} \Leftrightarrow m=3.$$

Thử lại, với $m = 2$ hệ có dạng: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

dễ thấy, hệ trên có nghiệm duy nhất (2, 1).

Vậy, với $m = 3$ hai hệ phương trình đã cho tương đương.

b. Giải hệ thứ nhất, ta được nghiệm duy nhất $x = -1$ và $y = 1$.

Do đó, muốn hai hệ tương đương thì (−1, 1) cũng phải là nghiệm của hệ còn lại, tức là:

$$\begin{cases} -1+3.1=2 \\ 3m(-1)+(m^2+8).1=4m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=2 \\ m^2-7m+6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2-m-6m+6=0 \Leftrightarrow (m-1)(m-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=6 \end{array}\right.$$

Thử lại:

- Với $m = 1$ hệ có dạng: $\begin{cases} x+3y=2 \\ 3x+9y=6 \end{cases}$

dễ thấy, hệ có vô số nghiệm, do đó $m = 1$ không thoả mãn..

Vậy, với $m = 3$ hai hệ phương trình đã cho tương đương.

- Với $m = 6$ hệ có dạng: $\begin{cases} x+3y=2 \\ 18x+44y=26 \end{cases}$

dễ thấy, hệ trên có nghiệm duy nhất (−1, 1).

Vậy, với $m = 6$ hai hệ phương trình đã cho tương đương.

CHỦ ĐỀ 3

GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Để xây dựng được thuật toán giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế, chúng ta hãy bắt đầu với việc giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 & (1) \\ x + 3y = 11 & (2) \end{cases}.$$

Bước 1 → *Chọn phương trình (1) và biểu thị ẩn y theo x.*

Xét phương trình (1) của hệ, ta biến đổi:

$y = 7 - 2x.$ (3)

Bước 2 → *Thay biểu thức của y vào phương trình (2), rồi tìm giá trị của x.*

Thay (3) vào phương trình (2), ta được:

$x + 3(7 - 2x) = 11$

$\Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x = 2.$

Bước 3 → *Thay giá trị của x vào biểu thức trong bước 1, để tìm y.*

Thay $x = 2$ vào (3), ta được:

$y = 7 - 2.2 = 3.$

Bước 4 → *Kết luận nghiệm*

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (2, 3).

Từ đó, để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biểu thị một ẩn (giả sử x) theo ẩn kia từ một trong hai phương trình.

Bước 2: Thay biểu thức của x vào phương trình kia rồi tìm giá trị của y.

Bước 3: Thay giá trị của y vừa tìm được vào biểu thức của x để tìm giá trị của x.

Bước 4: Kết luận nghiệm của hệ phương trình.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1: *Giải hệ phương trình:* $\begin{cases} 5x + 3y = 1 & (1) \\ 2x + y = -1 & (2) \end{cases}.$

Giải

Ta lựa chọn một trong hai cách rút:

Cách 1: (*Ta thực hiện phép rút* y): Xét phương trình (2) của hệ, ta biến đổi:

$y = -2x - 1.$ (3)

Thay (3) vào phương trình (1), ta được:

$5x + 3(-2x - 1) = 1 \Leftrightarrow -x = 4 \Leftrightarrow x = -4.$

Thay $x = -4$ vào (3), ta được:

$y = -2.(-4) - 1 = 7.$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (–4; 7).

Cách 2: (*Ta thực hiện phép rút* x): Xét phương trình (2) của hệ, ta biến đổi:

$$x = \frac{1}{2}(-y - 1). \quad (4)$$

Thay (4) vào phương trình (1), ta được:

$$5.\frac{1}{2}(-y - 1) + 3y = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}y = \frac{7}{2} \Leftrightarrow y = 7.$$

Thay $y = 7$ vào (4), ta được: $x = \frac{1}{2}(-7 - 1) = -4$.

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất $(-4; 7)$.

☞ ***Nhận xét***:

1. Qua ví dụ trên, các em học sinh hiểu rằng đối với phương pháp thế chúng ta cũng có thể lựa chọn việc rút x hoặc rút y. Tuy nhiên, để giảm thiểu độ phức tạp trong tính toán chúng ta thường chọn việc rút ẩn có hệ số nhỏ nhất trong hệ, cụ thể với hệ trên việc rút y từ phương trình (2) là lựa chọn tốt nhất.
2. Ưu điểm của phương pháp thế, được thể hiện nhiều trong bài toán giải và biện luận, vì ở đó số nghiệm của hệ phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình bậc nhất một ẩn thu được.

Ví dụ 2: (Bài 14/tr 15 – Sgk): *Giải các hệ phương trình bằng phương pháp thế*:

a. $\begin{cases} x + y\sqrt{5} = 0 \\ x\sqrt{5} + 3y = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$. b. $\begin{cases} (2 - \sqrt{3})x - 3y = 2 + 5\sqrt{3} \\ 4x + y = 4 - 2\sqrt{3} \end{cases}$.

✍ *Giải*

a. Ký hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1), (2).

Từ (1), ta có: $x = -y\sqrt{5}$.

Thế vào (2), ta được:

$$(2) \Leftrightarrow -y\sqrt{5}.\sqrt{5} + 3y = 1 - \sqrt{5} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Với $y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5} - 5}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ $(\frac{\sqrt{5} - 5}{2}; \frac{\sqrt{5} - 1}{2})$.

b. Ký hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1), (2).

Từ (2), ta có: $y = 4 - 2\sqrt{3} - 4x$. Thế vào (1), ta được:

$$(2 - \sqrt{3})x - 3(4 - 2\sqrt{3} - 4x) = 2 + 5\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (14 - \sqrt{3})x = 14 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = -2\sqrt{3}.$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm $(1; -2\sqrt{3})$.

Ví dụ 3: (Bài 15/tr 15 – Sgk): *Giải hệ phương trình:* $\begin{cases} x+3y=1 \\ (a^2+1)x+6y=2a \end{cases}$

trong các trường hợp sau:

a. $a=-1$. b. $a=0$. c. $a=1$.

Giải

a. Với $a=-1$, ta được hệ phương trình: $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+6y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=1 \\ x+3y=-1 \end{cases}$.

Dễ dàng nhận thấy hệ phương trình này vô nghiệm.

b. Với $a=0$, ta được hệ phương trình: $\begin{cases} x+3y=1 & (1) \\ x+6y=0 & (2) \end{cases}$

Từ (1), ta có: $x=1-3y$

Thay vào (2), ta được: $1-3y+6y=0 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3} \Rightarrow x=2$

Vậy, hệ có nghiệm $(2\,;\,-\frac{1}{3})$.

c. Với $a=1$, ta được hệ phương trình: $\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+6y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=1 \\ x+3y=1 \end{cases}$.

Dễ dàng nhận thấy hệ phương trình này có vô số nghiệm.

Ví dụ 4: (Bài 17/tr 16 – Sgk): *Giải các hệ phương trình bằng phương pháp thế:*

a. $\begin{cases} x\sqrt{2}-y\sqrt{3}=1 \\ x+y\sqrt{3}=\sqrt{2} \end{cases}$. b. $\begin{cases} x-2\sqrt{2}y=\sqrt{5} \\ x\sqrt{2}+y=1-\sqrt{10} \end{cases}$.

c. $\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x-y=\sqrt{2} \\ x+(\sqrt{2}+1)y=1 \end{cases}$.

Giải

a. Giải hệ: $\begin{cases} x\sqrt{2}-y\sqrt{3}=1 & (1) \\ x+y\sqrt{3}=\sqrt{2} & (2) \end{cases}$

Từ (2), ta có: $x=\sqrt{2}-y\sqrt{3}$.

Thế vào (1), ta được:

$$\sqrt{2}(\sqrt{2}-y\sqrt{3})-y\sqrt{3}=1 \Leftrightarrow 2-y\sqrt{6}-y\sqrt{3}=1$$

$$\Leftrightarrow y(\sqrt{6}+\sqrt{3})=1 \Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x=1.$$

Vậy, nghiệm của hệ $(1\,;\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3})$.

b. Giải hệ: $\begin{cases} x - 2\sqrt{2}y = \sqrt{5} & (1) \\ x\sqrt{2} + y = 1 - \sqrt{10} & (2) \end{cases}$

Từ (1), ta có: $x = 2\sqrt{2}\,y + \sqrt{5}$

Thế vào (2), ta được:

$$\sqrt{2}\,(2\sqrt{2}\,y + \sqrt{5}) + y = 1 - \sqrt{10} \Leftrightarrow 5y = 1 - 2\sqrt{10} \Leftrightarrow y = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm $\left(\frac{1 - 2\sqrt{10}}{5}\ ;\ \frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{5}}{5}\right)$.

c. Giải hệ: $\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - y = \sqrt{2} & (1) \\ x + (\sqrt{2} + 1)y = 1 & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta có: $y = (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}$

Thế vào (2), ta được:

$$x + (\sqrt{2} + 1)[(\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}] = 1 \Leftrightarrow 2x = 3 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}.$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm $\left(\frac{3 + \sqrt{2}}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 5: (Bài 18/tr 16 – Sgk): *Cho hệ phương trình:* $\begin{cases} 2x + by = -4 \\ bx - ay = -5 \end{cases}$ (I)

a. Xác định các hệ số a và b, biết rằng phương trình trên có nghiệm là (1 ; –2).

b. Xác định các hệ số a và b, biết rằng phương trình trên có nghiệm là $(\sqrt{2} - 1\ ;\ \sqrt{2})$.

Giải

Để giải dạng toán này, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Giả sử hệ đã cho nhận cặp nghiệm $(x ; y) = (x_1 ; y_1)$ là nghiệm. Do đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + by_1 = -4 \\ bx_1 - ay_1 = -5 \end{cases}. \quad (II)$$

Bước 2: Giải hệ phương trình (II) với biến a và b.

a. Hệ (I) có nghiệm (1; –2) nên ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2b = -4 \\ b + 2a = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ b + 2a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \end{cases}.$$

Vậy, với a = –4, b = 3 thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Hệ (I) có nghiệm $(\sqrt{2}-1\ ;\ \sqrt{2})$ nên ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2(\sqrt{2}-1)+b\sqrt{2}=-4 \\ b(\sqrt{2}-1)-a\sqrt{2}=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\sqrt{2}=-2-2\sqrt{2} \\ b(\sqrt{2}-1)-a\sqrt{2}=-5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-2-\sqrt{2} \\ b(\sqrt{2}-1)-a\sqrt{2}=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2-\sqrt{2} \\ a=\dfrac{5\sqrt{2}-2}{2}. \end{cases}$$

Vậy, với $a=\dfrac{5\sqrt{2}-2}{2}$, $b=-2-\sqrt{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 6: *Cho hệ phương trình:* $\begin{cases} mx+3y=-2 & (1) \\ m^2x-6y=4 & (2) \end{cases}$.

a. *Giải hệ phương trình với* $m=2$.

b. *Tìm giá trị của* m *để hệ có vô số nghiệm.*

Giải

Xét phương trình (1) của hệ, ta biến đổi:

$$y=\frac{1}{3}(-mx-2). \qquad (3)$$

Thay (3) vào phương trình (2), ta được:

$$m^2x-6.\frac{1}{3}(-mx-2)=4 \Leftrightarrow (m^2+2m)x=0. \qquad (4)$$

a. Với $m=2$, phương trình (4) có dạng: $8x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Thay $x=0$ và $m=2$ vào (3) ta được:

$$y=\frac{1}{3}(-2.0-2)=-\frac{2}{3}.$$

Vậy, với $m=2$ hệ có nghiệm duy nhất $(0;-\dfrac{2}{3})$.

b. Hệ có vô số nghiệm khi:

(4) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow m^2+2m=0 \Leftrightarrow m=0$ hoặc $m=-2$.

Vậy, với $m=0$ hoặc $m=-2$ hệ có vô số nghiệm.

Nhận xét:

1. Như vậy, trong lời giải trên để tận dụng phép thế trong một bài toán có hai câu hỏi chúng ta đã thực hiện theo 3 bước:

   Bước 1: Bằng phép thế, chuyển đổi tính chất của hệ thành tính chất của phương trình.

   Bước 2: Thực hiện câu a).

   Bước 3: Thực hiện câu b).

   Đó chính là cách thể hiện rất phổ biến khi học lên cao.

2. Chúng ta đều đã được biết rằng, có thể thực hiện yêu cầu "*Tìm m để hệ có vô số nghiệm*" bằng cách dựa trên vị trí tương đối của hai đường thẳng, cụ thể:

Trường hợp 1: Với m = 0, hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} 0.x + 3y = -2 \\ 0.x - 6y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \text{ tuỳ ý} \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$ thì điều kiện để hệ phương trình có vô số nghiệm là:

$$\frac{m}{m^2} = -\frac{3}{6} = -\frac{2}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy, với m = 0 và m = 2, hệ có vô số nghiệm.

Lưu ý: Nếu ta không xét trường hợp m = 0 mà chỉ kiểm tra điều kiện để hệ phương trình có vô số nghiệm: $\dfrac{m}{m^2} = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{2}{4}$

thì không được rút gọn m ở mẫu. Khi đó, ta phải biến đổi như sau:

$$\frac{m}{m^2} = -\frac{3}{6} = -\frac{2}{4} \Leftrightarrow \frac{m}{m^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2m = -m^2 \Leftrightarrow m(2-m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

Ví dụ 7: *Cho hệ phương trình:* $\begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ mx + 2y = m & (2) \end{cases}$.

Tìm m *để*:

a. *Hệ có vô số nghiệm.*

b. *Có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm duy nhất đó.*

✍ *Giải*

Xét phương trình (1) của hệ, ta biến đổi: $y = -x + 1$. (3)

Thay (3) vào phương trình (2), ta được:

$$mx + 2(-x + 1) = m \Leftrightarrow (m - 2)x = m - 2. \quad (4)$$

a. Hệ có vô số nghiệm khi: (4) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy, với m = 2 hệ có vô số nghiệm.

b. Hệ có nghiệm duy nhất khi:

(4) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Vậy, với $m \neq 2$ hệ có nghiệm duy nhất và nghiệm duy nhất là

$x = 1 \overset{(3)}{\Rightarrow} y = -1 + 1 = 0$, tức là có nghiệm (1, 0).

Ví dụ 8: *Cho hệ phương trình:* $\begin{cases} x + my = 1 & (1) \\ mx - y = -m & (2) \end{cases}$.

a. *Chứng tỏ rằng với mọi* m *hệ luôn có nghiệm duy nhất.*

b. *Tìm giá trị của* m *để hệ có nghiệm* (x, y) *là một điểm thuộc góc phần tư thứ* I.

✍ *Giải*

a. Xét phương trình (2) của hệ, ta biến đổi: $y = mx + m$. (3)

Thay (3) vào phương trình vào (1), ta được:

$$x + m(mx + m) = 1 \Leftrightarrow (m^2 + 1)x = 1 - m^2 \Leftrightarrow x = \frac{1 - m^2}{m^2 + 1}.$$

Thay $x = \frac{1 - m^2}{m^2 + 1}$ vào (3), ta được:

$$y = m.\frac{1 - m^2}{m^2 + 1} + m = \frac{m(1 - m^2) + m(m^2 + 1)}{m^2 + 1} = \frac{2m}{m^2 + 1}.$$

Vậy, với mọi m hệ luôn có nghiệm duy nhất.

b. Để nghiệm (x, y) là một điểm thuộc góc phần tư thứ I, điều kiện là:

$$\begin{cases} \frac{1 - m^2}{m^2 + 1} > 0 \\ \frac{2m}{m^2 + 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 < 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Vậy, với $0 < m < 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Nhận xét***:

1. Trong chủ đề 9, chúng ta đã thực hiện câu a) bằng phương pháp cộng và ở đó chúng ta cần xét hai trường hợp $m = 0$ và $m \neq 0$. Còn đối với phương pháp thế thì không cần phải như vậy, đó chính là một trong số những ưu điểm của phương pháp thế so với phương pháp cộng.
2. Với câu b), chúng ta đã sử dụng một trong các kết quả sau:
   - $M(x, y) \in P(I) \Leftrightarrow x > 0$ và $y > 0$.
   - $M(x, y) \in P(II) \Leftrightarrow x < 0$ và $y > 0$.
   - $M(x, y) \in P(III) \Leftrightarrow x < 0$ và $y < 0$.
   - $M(x, y) \in P(IV) \Leftrightarrow x > 0$ và $y < 0$.

Tiếp theo, chúng ta sẽ quan tâm tới các hệ phương trình được giải nhờ kiến thức của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn (thường được gọi là *các hệ phương trình quy về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn*).

Trước tiên, là các hệ phương trình được chuyển về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng các phép biến đổi tương đương.

Ví dụ 2: *Giải hệ phương trình:* $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3} & (1) \\ 4x - 3y = -2 & (2) \end{cases}$.

✍ *Giải*

Xét phương trình (1) của hệ, ta biến đổi: $x = \frac{2y}{3}$. (3)

Thay (3) vào phương trình (2), ta được:

$$4.\frac{2y}{3} - 3y = -2 \Leftrightarrow 8y - 9y = -6 \Leftrightarrow y = 6.$$

Thay $y = 6$ vào (3), ta được: $x = \frac{2.6}{3} = 4$.

Vậy, hệ có nghiệm (4, 6).

Ví dụ 10: *Giải hệ phương trình:* $\begin{cases} y - |x| = 1 & (1) \\ 2x - y = 1 & (2) \end{cases}$.

Giải

Xét phương trình (2) của hệ, ta biến đổi: $y = 2x - 1$. (3)

Thay (3) vào phương trình (1), ta được:

$$2x - 1 - |x| = 1 \Leftrightarrow |x| = 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2x - 2 \\ x = -2x + 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Thay $x = 2$ vào (3), ta được: $y = 2.2 - 1 = 3$

Vậy, hệ có nghiệm (2, 3).

Ví dụ 11: *Giải hệ phương trình:* $\begin{cases} 2x + y = 4 & (1) \\ |x - 2y| = 3 & (2) \end{cases}$.

Giải

Xét phương trình (1) của hệ, ta biến đổi: $y = -2x + 4$. (3)

Thay (3) vào phương trình (2), ta được:

$$|x - 2(-2x + 4)| = 3 \Leftrightarrow |5x - 8| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x - 8 = 3 \\ 5x - 8 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{11}{5} \end{array}\right.$$

- Với $x = 1$, thay vào (3), ta được $y = -2.1 + 4 = 1$.
- Với $x = \frac{11}{5}$, thay vào (3), ta được $y = -2.\frac{11}{5} + 4 = -\frac{2}{5}$.

Vậy, hệ có hai cặp nghiệm (1, 2) và $(\frac{11}{5}, -\frac{2}{5})$.

Nhận xét:

1. Như vậy, với việc sử dụng phương pháp thế chúng ta đã chuyển được hệ phương trình về một phương trình chứa dấu trị tuyệt đối.
2. Tất nhiên, chúng ta cũng có thể sử dụng phương pháp cộng để giải, bằng việc chuyển đổi hệ ban đầu thành hai hệ: $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$.

Ví dụ 12: (Bài 19/tr 16 – Sgk): *Biết rằng đa thức* P(x) *chia hết cho đa thức* x – a *khi và chỉ khi* P(a) = 0. *Hãy tìm các giá trị của* m *và* n *sao cho đa thức sau đồng thời chia hết cho* x + 1 *và* x – 3.

$$P(x) = mx^3 + (m-2)x^2 - (3n-5)x - 4n.$$

Giải

Ta có:

- Đa thức P(x) chia hết cho nhị thức x + 1 khi:

  $P(-1) = -m + (m-2) + (3n-5) - 4n = 0$

  $\Leftrightarrow -n - 7 = 0 \Leftrightarrow n = -7.$ (1)

- Đa thức P(x) chia hết cho nhị thức x – 3 khi:

  $P(3) = 27m + 9(m-2) - 3(3n-5) - 4n.$ (2)

Thay (1) vào (2), ta được: $m = -\frac{22}{9}$.

Vậy, biểu thức $P(x) = -\frac{22}{9}x^3 + \frac{40}{9}x^2 + 27x + 28.$

Ví dụ 13: *Giải các hệ phương trình sau:* $\begin{cases} 2x^2 + 3y = 17 \\ 3x^2 - 2y = 6 \end{cases}$.

Giải

Đặt $u = x^2$, điều kiện $u \geq 0$. Khi đó, hệ có dạng: $\begin{cases} 2u + 3y = 17 & (1) \\ 3u - 2y = 6 & (2) \end{cases}$

Xét phương trình (1) của hệ, ta biến đổi: $u = \frac{1}{2}(17 - 3y).$ (3)

Thay (3) vào phương trình vào (2), ta được:

$$3.\frac{1}{2}(17-3y) - 2y = 6 \Leftrightarrow \frac{13y}{2} = \frac{39}{2} \Leftrightarrow y = 3.$$

Thay y = 3 vào (3), ta được: $u = \frac{1}{2}(17 - 3.3) = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$

Vậy, hệ có hai cặp nghiệm (2, 3) và (–2, 3).

Ví dụ 14: *Giải hệ phương trình:* $\begin{cases} \sqrt{x+3y} = \sqrt{3x-1} \\ 5x - y = 9 \end{cases}$.

Giải

Biến đổi hệ về dạng: $\begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ x + 3y = 3x - 1 \\ 5x - y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1/3 & (*) \\ 2x - 3y = 1 & (1) \\ 5x - y = 9 & (2) \end{cases}$

Xét phương trình (2) của hệ, ta biến đổi: $y = 5x - 9$. (3)

Thay (3) vào phương trình vào (1), ta được:

$2x - 3(5x - 9) = 1 \Leftrightarrow 13x = 26 \Leftrightarrow x = 2$, thoả mãn (*).

Thay $x = 2$ vào (3), ta được: $y = 5.2 - 9 = 1$

Vậy, hệ có nghiệm (2, 1).

☛ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên, việc biến đổi phương trình thứ nhất của hệ chúng ta đã sử dụng lại phép biến đổi tương đương đã bbiết là:

$$\sqrt{f} = \sqrt{g} \Leftrightarrow f = g \geq 0.$$

Tiếp theo, chúng ta sẽ quan tâm tới các hệ phương trình được chuyển về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phép đặt ẩn phụ.

Ví dụ 15: *Giải các hệ phương trình sau*:

a. $\begin{cases} \dfrac{6}{x-1} - \dfrac{5}{y-2} = 7 \\ \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2}{y-2} = -1 \end{cases}$. b. $\begin{cases} 2x^2 + 3y = 17 \\ 3x^2 - 2y = 6 \end{cases}$.

✍ *Giải*

a. Điều kiện $x \neq 1$ và $y \neq 2$. Đặt: $\begin{cases} u = \dfrac{1}{x-1} \\ v = \dfrac{1}{y-2} \end{cases}$.

Khi đó, hệ có dạng: $\begin{cases} 6u - 5v = 7 & (1) \\ 3u + 2v = -1 & (2) \end{cases}$

Xét phương trình (2) của hệ, ta biến đổi: $v = \dfrac{1}{2}(-1 - 3u)$. (3)

Thay (3) vào phương trình (1), ta được:

$$6u - 5.\frac{1}{2}(-1 - 3u) = 7 \Leftrightarrow 27u = 9 \Leftrightarrow u = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 4..$$

Thay $u = \dfrac{1}{3}$ vào (3), ta được: $v = \dfrac{1}{2}(-1 - 3.\dfrac{1}{3}) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{y-2} = -1 \Leftrightarrow y = 1.$

Vậy, hệ có nghiệm (4, 1).

b. Đặt $u = x^2$, điều kiện $u \geq 0$. Khi đó, hệ có dạng: $\begin{cases} 2u + 3y = 17 & (1) \\ 3u - 2y = 6 & (2) \end{cases}$

Xét phương trình (1) của hệ, ta biến đổi: $u = \dfrac{1}{2}(17 - 3y)$. (3)

Thay (3) vào phương trình vào (2), ta được:

$$3.\frac{1}{2}(17-3y)-2y=6 \Leftrightarrow \frac{13y}{2}=\frac{39}{2} \Leftrightarrow y=3.$$

Thay $y=3$ vào (3), ta được: $u=\frac{1}{2}(17-3.3)=4 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Vậy, hệ có hai cặp nghiệm (2, 3) và (–2, 3).

Ví dụ 16: *Giải hệ phương trình:* $\begin{cases}|x-1|+|y-1|=2\\4|x-1|+3|y-1|=7\end{cases}$.

Giải

Đặt: $\begin{cases}|x-1|=u\\|y-1|=v\end{cases}$, điều kiện $u, v \geq 0$. Khi đó, hệ có dạng: $\begin{cases}u+v=2 & (1)\\4u+3v=7 & (2)\end{cases}$

Xét phương trình (1) của hệ, ta biến đổi: $u=2-v$. (3)

Thay (3) vào phương trình (2), ta được:

$$4(2-v)+3v=7 \Leftrightarrow v=1 \Leftrightarrow |y-1|=1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}y-1=1\\y-1=-1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}y=2\\y=0\end{bmatrix}.$$

Thay $v=1$ vào (3), ta được:

$$u=2-1=1 \Leftrightarrow |x-1|=1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x-1=1\\x-1=-1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x=2\\x=0\end{bmatrix}.$$

Vậy, hệ có 4 cặp nghiệm (2, 2), (2, 0), (0, 2), (0, 0).

Ví dụ 17: *Giải hệ phương trình:* $\begin{cases}3\sqrt{x-1}+2\sqrt{y}=13\\2\sqrt{x-1}-\sqrt{y}=4\end{cases}$.

Giải

Điều kiện : $\begin{cases}x-1\geq 0\\y\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 1\\y\geq 0\end{cases}$. Đặt: $\begin{cases}u=\sqrt{x-1}\\v=\sqrt{y}\end{cases}$, điều kiện $u, v \geq 0$.

Khi đó, hệ có dạng: $\begin{cases}3u+2v=13 & (1)\\2u-v=4 & (2)\end{cases}$

Xét phương trình (2) của hệ, ta biến đổi: $v=2u-4$. (3)

Thay (3) vào phương trình (1), ta được:

$3u+2(2u-4)=13 \Leftrightarrow 7u=21 \Leftrightarrow u=3$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=3 \Leftrightarrow x-1=9 \Leftrightarrow x=10.$

Thay $u=3$ vào (3), ta được: $v=2.3-4=2 \Leftrightarrow \sqrt{y}=2 \Leftrightarrow y=4$.

Vậy, hệ có nghiệm (10, 4).

Vấn đề 2: SỬ DỤNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Cho hai hệ phương trình:* $\begin{cases}2x-y=6\\3x+y=9\end{cases}$ (I) và $\begin{cases}2x-y=6\\y=m\end{cases}$ (III)

Xác định m *sao cho hai hệ phương trình trên tương đương.*

Giải

Giải (I) bằng phương pháp thế, ta được nghiệm (3; 0).

Hệ (I) và (II) tương đương khi (3, 0) cũng là nghiệm của (II), tức là:

$$\begin{cases}2.3-0=6\\0=m\end{cases} \Leftrightarrow m=0.$$

Thử lại, với m = 0 hệ (II) có dạng: $\begin{cases}2x-y=6\\y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$.

Vậy, với m = 0 hai hệ phương trình trên tương đương.

Ví dụ 1a: *Với giá trị nào của* m *thì 2 phương trình sau có nghiệm chung*

$$2x^2+mx-1=0 \text{ và } mx^2-x+2=0.$$

Giải

Các phương trình đã cho có nghiệm chung khi và chỉ khi hệ sau có ngghiệm:

$\begin{cases}2x^2+mx-1=0\\mx^2-x+2=0\end{cases}$. Đặt $x^2=y$, ta được hệ: $\begin{cases}mx+2y=1 & (1)\\x-my=2 & (2)\end{cases}$.

Xét phương trình (2) của hệ, ta biến đổi $x = my + 2$. (3)

Thay (3) vào phương trình vào (1), ta được:

$$m(my+2)+2y=1 \Leftrightarrow (m^2+2)y=1-2m \Leftrightarrow y=\frac{1-2m}{m^2+2}.$$

Thay $y=\frac{1-2m}{m^2+2}$ vào (3), ta được:

$$x=m.\frac{1-2m}{m^2+2}+2=\frac{m(1-2m)+2(m^2+2)}{m^2+2}=\frac{m+4}{m^2+2}.$$

Do $x^2=y$, nên ta phải có: $\left(\frac{m+4}{m^2+2}\right)^2=\frac{1-2m}{m^2+2} \Leftrightarrow m^3+6m+7=0$

$\Leftrightarrow (m+1)(m^2-m+1)=0 \Leftrightarrow m+1=0 \Leftrightarrow m=-1.$

Vậy, với m = −1 hai phương trình có nghiệm chung là x = 1.

☞ ***Nhận xét***: Lời giải trong ví dụ trên, chính là phương pháp hiệu quả để thực hiện yêu cầu " *Tìm điều kiện của tham số để hai phương trình bậc hai có nghiệm chung* ", dạng toán này chúng ta sẽ còn gặp lại trong chương sau.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Sử dụng phương pháp thế giải các hệ phương trình sau và minh hoạ nghiệm bằng đồ thị.

a. $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ -4x - 6y = 12 \end{cases}$.

c. $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$.

d. $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases}$.

Bài 2: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} 3x + 4y = -4 \\ 12x + 16y - 5 = 0 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x - y = 5 \\ (x - 2)(y + 3) = 3 + xy \end{cases}$.

c. $\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{6} = 1 \\ \frac{x}{8} + \frac{y}{3} = 8 \end{cases}$.

Bài 3: Xác định hàm số y = ax + b biết rằng đồ thị hàm số của nó đi qua điểm A (1 ; 2) và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

Bài 4: Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm:

a. A (0 ; 3) và B (1 ; 2).

b. A (1 ; 6) và B (2 ; 0).

c. A (–3 ; 14) và B (2 ; –1).

Bài 5: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 11 \\ 5x - 3y = m + 1 \end{cases}$.

a. Giải hệ với m = 2.

b. Tìm giá trị của m để hệ phương trình trên có nghiệm.

Bài 6: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 3mx + 5y = 1 \\ 2x + my = -4 \end{cases}$.

a. Giải hệ với m = 2.

b. Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 7: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - 3y = m \\ -3x + 9y \equiv -12 \end{cases}$.

a. Tìm giá trị của m để hệ phương trình có vô số nghiệm.

b. Tìm giá trị của m để hệ phương trình có vô nghiệm.

Bài 8: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + 2y = 5 \\ 2x + y = m \end{cases}$.

a. Tìm giá trị của m để hệ phương trình một nghiệm duy nhất.

b. Tìm giá trị của m để hệ phương trình có vô số nghiệm.

c. Tìm giá trị của m để hệ phương trình có vô nghiệm.

Bài 9: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - my = m \\ mx + y = 1 \end{cases}$.

a. Chứng tỏ rằng với mọi m hệ luôn có nghiệm.

b. Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm (x, y) là một điểm thuộc góc phần tư thứ I.

Bài 10: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x-y=2 \\ 3x-2y=9 \end{cases}$. (I)

Xác định m để các hệ phương trình sau tương đương với hệ phương trình (I)).

a. $\begin{cases} 2x-2y=m \\ 3x-2y=9 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 2x-my=4 \\ (m+1)x-2y=9 \end{cases}$.

Bài 11: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x+y=2 \\ |2x-3y|=1 \end{cases}$.

c. $\begin{cases} 2x-y=1 \\ |x-y|=|2y-1| \end{cases}$.

b. $\begin{cases} |x-y|=12y-11 \\ 2x-y=1 \end{cases}$.

Bài 12: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} |x|-y+1=0 \\ 2x-|y|-1=0 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} |x|+2|y|=3 \\ 7x+5y=2 \end{cases}$.

Bài 13: Với giá trị nào của m thì 2 phương trình sau có nghiệm chung:

$mx^2+x+1=0$ và $x^2+mx+1=0$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: a. (–3, 2). b. (–3, 0). c. (6, 0). d. (3, 4).

Bài 2: a. Vô nghiệm. b. (–1, –6). c. $(\frac{112}{15}, \frac{26}{5})$.

Bài 3: Ta có:

- A(1; 2) thuộc đồ thị hàm số nên 2 = a + b. (1)
- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 khi điểm B ((0 ; 1) thuộc đồ thị hàm số nên 1 = b. (2)

Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình: $\begin{cases} a+b=2 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$.

Vậy, hàm số cần tìm là y = x + 1.

Bài 4: a. x + y = 3. b. 6x + y = 12. c. 3x + y = 5.

Bài 5: a. (3, 4). b. $m \neq -\frac{3}{5}$.

Bài 6: a. (11, –13). b. $m \neq \pm \frac{\sqrt{30}}{3}$

Bài 7: a. m = 4. b. $m \neq 4$.

Bài 8: a. $m \neq 4$. b. Không tồn tại m. c. m = 4.

Bài 9: a. $x = \frac{-2m}{m^2+1}$ và $y = \frac{m^2-1}{m^2+1}$. b. m < –1.

Bài 10: a. m = 4. b. m = 2.

Bài 11: a. $(\frac{7}{5}, \frac{3}{5})$ và (1, 1). b. $(\frac{24}{25}, \frac{23}{25})$ và $(\frac{22}{23}, \frac{21}{23})$. c. $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$) và $((\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

CHỦ ĐỀ 4

GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Để xây dựng được thuật toán giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng, chúng ta hãy bắt đầu với việc giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ x+3y=11 \end{cases}$$

Bước 1 → *Biến đổi hệ số của ẩn x trong hệ bằng nhau, bằng cách nhân phương trình thứ hai với 2.*

Lần lượt thực hiện các phép biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 2x+6y=22 \end{cases}$$

Bước 2 → *Trừ theo vế hai phương trình để khử ẩn x và thu được một phương trình chỉ chứa y.*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5y=-15 \\ 2x+y=7 \end{cases}$$

Bước 3 → *Giải phương trình chỉ chứa ẩn y, để tìm giá trị của y.*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ 2x+y=7 \end{cases}$$

Bước 4 → *Thay giá trị của y vào phương trình còn lại, để được một phương trình chỉ chứa ẩn x.*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ 2x+3=7 \end{cases}$$

Bước 5 → *Giải phương trình chỉ chứa ẩn x, rồi kết luận về nghiệm của hệ.*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (2, 3).

Từ đó, để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi để các hệ số của một ẩn (giả sử x) có giá trị tuyệt đối bằng nhau.

Bước 2: Cộng hoặc trừ từng vế của hai phương trình để khử ẩn x.

Bước 3: Giải phương trình tìm giá trị của y.

Bước 4: Thay giá trị y vừa tìm được vào một trong hai phương trình ban đầu để tìm giá trị của x.

Bước 5: Kết luận nghiệm của hệ phương trình.

☞ ***Chú ý:***

1. Để cho gọn lời giải, thông thường các bước 3 và bước 4 được kết hợp lại với nhau.

2. Trong một vài trường hợp, bước 1 và bước 3 không cần thực hiện, vídụ:

a. $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+3y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=12 \\ x-3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ 4-3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1: *Giải các hệ phương trình sau:*

a. $\begin{cases} 3x+4y=18 \\ 4x-3y=-1 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} \sqrt{3}x-\sqrt{2}y=1 \\ \sqrt{2}x+3\sqrt{3}y=4\sqrt{6} \end{cases}$.

Giải

a. Ta lựa chọn một trong hai cách khử:

Cách 1: Ta thực hiện phép khử x:

$$\begin{cases} 3x+4y=18 \\ 4x-3y=-1 \end{cases} \overset{\times 4}{\underset{\times 3}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 12x+16y=72 \\ 12x-9y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25y=75 \\ 12x-9y=-9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ 12x-9.3=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (2; 3).

Cách 2: Ta thực hiện phép khử y:

$$\begin{cases} 3x+4y=18 \\ 4x-3y=-1 \end{cases} \overset{\times 3}{\underset{\times 4}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} 9x+12y=54 \\ 16x-12y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x=50 \\ 9x+12y=54 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 9.2+12y=54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (2; 3).

b. Ta thực hiện:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x-\sqrt{2}y=1 \\ \sqrt{2}x+3\sqrt{3}y=4\sqrt{6} \end{cases} \overset{\times\sqrt{2}}{\underset{\times\sqrt{3}}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} \sqrt{6}x-2y=\sqrt{2} \\ \sqrt{6}x+9y=12\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y=11\sqrt{2} \\ \sqrt{6}x-2y=\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{2} \\ \sqrt{6}x-2\sqrt{2}=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất $(\sqrt{3}; \sqrt{2})$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải trên:

1. Qua ví dụ trên, các em học sinh hiểu thêm rằng việc nhân hệ số để một ẩn trong hệ có hệ số bằng nhau hoặc đối nhau, trong nhiều trường hợp cần thực hiện phép nhân ở cả hai phương trình của hệ (trong ví dụ là 3 và 4 cho mỗi phương trình).
2. Ở câu b), ta cần nhân hai phương trình của hệ theo thứ tự với $\sqrt{2}$ và $\sqrt{3}$ mới nhận được hệ số của x trong hệ là bằng nhau.

   Trong thực tế, chúng ta sẽ gặp dạng toán cần thực hiện theo hai bước:

   Bước 1: Thiết lập hệ phương trình.

   Bước 2: Giải hệ nhận được trong bước 1.

Ví dụ 2: (Bài 21/tr 19 – Sgk): *Giải các hệ phương trình sau:*

a. $\begin{cases} x\sqrt{2} - 3y = 1 \\ 2x + y\sqrt{2} = -2 \end{cases}$. b. $\begin{cases} 5x\sqrt{3} + y = 2\sqrt{2} \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$.

✍ *Giải*

a. Ký hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1), (2).

Nhân hai vế của (1) với $-\sqrt{2}$, ta có hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} -2x + 3\sqrt{2}y = -\sqrt{2} \\ 2x + y\sqrt{2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{2}y = -2 - \sqrt{2} \\ 2x + y\sqrt{2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-1-\sqrt{2}}{4} \\ x = \dfrac{\sqrt{2}-6}{8} \end{cases}.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{\sqrt{2}-6}{8}, \dfrac{-1-\sqrt{2}}{4}\right)$.

b. Ký hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1), (2).

Nhân hai vế của (1) với $\sqrt{2}$, ta có hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} 5x\sqrt{6} + y\sqrt{2} = 4 \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x\sqrt{6} = 6 \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6}/6 \\ y = -\sqrt{2}/2 \end{cases}.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất $\left(\sqrt{6}/6, -\sqrt{2}/2\right)$.

Ví dụ 3: *Cho hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - y = -m \end{cases}.$$

a. *Chứng tỏ rằng với mọi* m *hệ luôn có nghiệm duy nhất.*

b. *Tìm giá trị của* m *để hệ có nghiệm* (x, y) *thoả mãn* $x < 1$ *và* $y < 1$.

c. *Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm* x *và* y *không phụ thuộc vào* m.

Giải

a. Nhận xét rằng với m = 0, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0 \text{ hệ có nghiệm duy nhất.}$$

Với $m \neq 0$, biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ m^2 x - my = -m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2+1)x = 1 - m^2 \\ x + my = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1-m^2}{m^2+1} \\ \dfrac{1-m^2}{m^2+1} + my = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1-m^2}{m^2+1} \\ y = \dfrac{2m}{m^2+1} \end{cases}.$$

Tức là, với $m \neq 0$ hệ cũng có nghiệm duy nhất.

Vậy, với mọi m hệ luôn có nghiệm duy nhất.

b. Để nghiệm (x, y) của hệ thoả mãn $x < 1$ và $y < 1$, điều kiện là:

$$\begin{cases} \dfrac{1-m^2}{m^2+1} < 1 \\ \dfrac{2m}{m^2+1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 < m^2 + 1 \\ 2m < m^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 0 \\ (m-1)^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

Vậy, với $m \neq 0$ và $m \neq 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Nhận xét rằng:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1-m^2}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2 = \frac{(1-m^2)^2 + 4m^2}{(m^2+1)^2}$$

$$= \frac{m^4 - 2m^2 + 1 + 4m^2}{(m^2+1)^2} = \frac{m^4 + 2m^2 + 1}{(m^2+1)^2} = \frac{(m^2+1)^2}{(m^2+1)^2} = 1$$

Vậy, ta thu được hệ thức $x^2 + y^2 = 1$.

Chú ý:

1. Trong lời giải câu a), nếu chúng ta không xét riêng trường hợp m = 0 và $m \neq 0$ sẽ vi phạm phép biến đổi tương đương.
2. Trong phạm vi kiến thức THCS, khó có thể giải thích một cách đầy đủ cho các em học sinh hiểu được tại sao lại có được nhận xét về $x^2 + y^2$. Tuy nhiên, đối với các em học sinh thực sự muốn nâng cao kiến thức thì hãy tham khảo cuốn ***Phương pháp giải toán Đại số*** của Lê Hồng Đức do NXB Hà Nội ấn hành.

Ví dụ 4: *Cho hệ phương trình:* $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx + y = m + 1 \end{cases}$.

a. *Giải hệ phương trình với* $m = 1$.

b. *Chứng tỏ rằng với mọi* $m \neq \pm 1$ *hệ luôn có nghiệm duy nhất.*

c. *Tìm giá trị của* m *để nghiệm duy nhất* $(x; y)$ *của hệ thoả mãn* $x + y < 0$.

d. *Tìm* m *nguyên để hệ có nghiệm nguyên duy nhất.*

Giải

a. Với $m = 1$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{hệ có vô số nghiệm thoả mãn } (x; 2 - 2).$$

b. Nhận xét rằng với $m = 0$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow m = 0 \text{ hệ có nghiệm duy nhất.}$$

Với $m \neq 0$, biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} mx + m^2 y = 2m \\ mx + y = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 1)y = m - 1 \\ mx + y = m + 1 \end{cases} \overset{m \neq \pm 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = \dfrac{1}{m+1} \\ mx + \dfrac{1}{m+1} = m + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{m+2}{m+1} \ \& \ y = \frac{1}{m+1}.$$

Tức là, với $m \neq 0$ và $m \neq \pm 1$ hệ cũng có nghiệm duy nhất.

Vậy, với mọi $m \neq \pm 1$ hệ luôn có nghiệm duy nhất.

c. Để nghiệm duy nhất của hệ thoả mãn $x + y < 0$, điều kiện là:

$$\frac{m+2}{m+1} + \frac{1}{m+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{m+3}{m+1} < 0 \Leftrightarrow -3 < m < -1,$$

thoả mãn điều kiện duy nhất nghiệm.

Vậy, với $-3 < m < -1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

d. Để nghiệm nguyên duy nhất của hệ nguyên điều kiện cần là $m + 1$ là ước của 1 (gồm có ± 1), ta lập bảng:

$m + 1$	-1	1
m	-2	0
$y = \dfrac{1}{m+1}$	-1	1
$x = \dfrac{m+2}{m+1}$	0	2

Vậy, với $m = -2$ hoặc $m = 0$ hệ có nghiệm nguyên duy nhất.

Ví dụ 5: *Giải hệ phương trình:* $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2} \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện $y \neq 0$.

Ta thực hiện:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2} \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3y \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 9y = 0 \\ 6x - 4y = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 10 \\ 6x - 9y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 6x - 9.2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (3; 2).

☞ ***Nhận xét***: Hẳn các em học sinh cũng thấy, ở dạng ban đầu hệ phương trình trong ví dụ trên không phải là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Tuy nhiên, chỉ cần một vài phép biến đổi đơn giản chúng ta đã chuyển được về hệ bậc nhất hai ẩn, để từ đó sử dụng phương pháp cộng để tìm nghiệm.

Ví dụ 6: (Bài 26/tr 19 – Sgk): *Giải các hệ phương trình:*

a. $\begin{cases} 2(x+y) + 3(x-y) = 4 \\ (x+y) + 2(x-y) = 5 \end{cases}$. b. $\begin{cases} 2(x-2) + 3(1+y) = -2 \\ 3(x-2) - 2(1+y) = -3 \end{cases}$.

Giải

a. Giải hệ: $\begin{cases} 2(x+y) + 3(x-y) = 4 \\ (x+y) + 2(x-y) = 5 \end{cases}$

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách giải sau:

Cách 1: Thực hiện việc rút gọn các phương trình của hệ đã cho rồi đưa về hệ:

$$\begin{cases} 5x - y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y = 4 \\ 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{13}{2} \end{cases}.$$

Cách 2: Đặt ẩn phụ $X = x + y$; $Y = x - y$, ta có hệ:

$$\begin{cases}2X+3Y=4\\X+2Y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2X+3Y=4\\2X+4Y=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2X+3Y=4\\Y=6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}X=-7\\Y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=-7\\x-y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=-1\\x-y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\y=-\dfrac{13}{2}\end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có một nghiệm duy nhất.

b. Ta có:

$$\begin{cases}2(x-2)+3(1+y)=-2\\3(x-2)-2(1+y)=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+3y=-1\\3x-2y=5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4x+6y=-2\\9x-6y=15\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}13x=13\\9x-6y=15\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có một nghiệm duy nhất.

Ví dụ 7: (Bài 27/tr 19 – Sgk): *Giải các hệ phương trình*:

a. $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1\\\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=5\end{cases}$.

b. $\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{y-1}=2\\\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{y-1}=1\end{cases}$.

Giải

a. Đặt $u = \dfrac{1}{x}$ và $v = \dfrac{1}{y}$, ta đưa hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases}u-v=1\\3u+4v=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4u-4v=4\\3u+4v=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7u=9\\3u+4v=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=\dfrac{9}{7}\\v=\dfrac{2}{7}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{7}{9}\\y=\dfrac{7}{2}\end{cases}.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất.

b. Đặt $u = \dfrac{1}{x-2}$ và $v = \dfrac{1}{y-1}$, ta đưa hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases}u-v=2\\2u+3v=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3u-3v=6\\2u+3v=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5u=7\\2u+3v=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=\dfrac{7}{5}\\v=\dfrac{3}{5}\end{cases}.$$

- Từ $u = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{1}{x-2} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow x = \frac{5}{7} + 2 \Leftrightarrow x = \frac{19}{7}$.
- Từ $v = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{1}{y-1} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow y = \frac{5}{3} + 1 \Leftrightarrow y = \frac{8}{3}$.

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 8: *Tìm giá trị của* m *để các cặp hệ phương trình sau tương đương:*

a. $\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$ và $\begin{cases} mx - y = m \\ x - y = -1 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3x + 8y = 5 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$.

Giải

a. Giải hệ thứ nhất, ta được nghiệm duy nhất $x = 3$ và $y = 4$.

Do đó, muốn hai hệ tương đương thì (3, 4) cũng phải là nghiệm của hệ còn lại, tức là: $\begin{cases} m.3 - 4 = m \\ 3 - 4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 4 \\ -1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$

Thử lại, với $m = 2$ hệ có dạng: $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x - y = -1 \end{cases}$, dễ thấy, hệ trên có nghiệm duy nhất (3, 4).

Vậy, với $m = 2$ hai hệ phương trình đã cho tương đương.

b. Giải hệ thứ nhất, ta được nghiệm duy nhất $x = -1$ và $y = 1$.

Do đó, muốn hai hệ tương đương thì (−1, 1) cũng phải là nghiệm của hệ còn lại, tức là: $\begin{cases} -1 + 2.1 = 1 \\ 2(-1) + m.1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$

Thử lại, với $m = 4$ hệ có dạng: $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$ dễ thấy, hệ trên có vô số nghiệm, do đó không thoả mãn.

Vậy, không tồn tại m để hai hệ phương trình đã cho tương đương.

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, với yêu cầu " *Tìm điều kiện của tham số để hai hệ phương trình tương đương* " trong trường hợp có nghiệm duy nhất chúng ta nhất thiết phải thực hiện bước thử lại, bởi khi hệ thứ nhất có nghiệm duy nhất (x_0, y_0) còn hệ thứ hai có vô số nghiệm và nhận (x_0, y_0) làm một nghiệm thì hai hệ không thể được gọi là tương đương.

Vấn đề 2: SỬ DỤNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: (Bài 26/tr 19 – Sgk): *Xác định* a *và* b *để đồ thị của hàm số* $y = ax + b$ *đi qua hai điểm* A *và* B *trong mỗi trường hợp sau:*

a. A(2 ; --2) và B(−1 ; 3). b. A(−4 ; −2) và B(2 ; 1).

c. A(3 ; −1) và B(−3 ; 2). d. A($\sqrt{3}$; 2) và B(0 ; 2).

Giải

a. Ta có:

- $A(2 ; -2) \in (d): y = ax + b \Leftrightarrow -2 = 2a + b.$ (1)
- $B(-1 ; 3) \in (d): y = ax + b \Leftrightarrow 3 = -a + b.$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $\begin{cases} 2a + b = -2 \\ -a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -5 \\ -a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{3} \\ b = \dfrac{4}{3} \end{cases}.$

Vậy, đồ thị cần tìm là (d): $y = -\dfrac{5}{3}x + \dfrac{4}{3}$.

b. Ta có:

- $A(-4 ; -2) \in (d): y = ax + b \Leftrightarrow -2 = -4a + b.$ (1)
- $B(2 ; 1) \in (d): y = ax + b \Leftrightarrow 1 = 2a + b.$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $\begin{cases} -4a + b = -2 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a = -3 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 0 \end{cases}$

Vậy, đồ thị cần tìm là (d): $y = \dfrac{1}{2}x$.

c. Tương tự, ta có đồ thị cần tìm là (d): $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

d. Tương tự, ta có đồ thị cần tìm là (d): $y = 2$

☞ ***Chú ý***: Chúng ta đều đã biết, mọi đường thẳng trong mặt phẳng đều có phương trình dạng $ax + by = c$, với a, b không đồng thời bằng 0 và một đường thẳng được hoàn toàn xác định khi biết hai điểm phân biệt thuộc nó. Thí dụ tiếp theo sẽ minh họa cách lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.

Ví dụ 2: *Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm* A(−2; −6) *và* B(4; 3).

Giải

Giả sử đường thẳng có phương trình $ax + by = c$, từ giả thiết:

- A(−2; −6) thuộc đường thẳng, suy ra:
  $a.(-2) + b(-6) = c \Leftrightarrow -2a - 6b = c.$ (1)
- B(4; 3) thuộc đường thẳng, suy ra:
  $a.4 + b.3 = c \Leftrightarrow 4a + 3b = c.$ (2)

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases} -2a-6b=c \\ 4a+3b=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a-6b=c \\ 8a+6b=2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a=3c \\ 8a+6b=2c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{c}{2} \\ 8.\dfrac{c}{2}+6b=2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{c}{2} \\ b=-\dfrac{c}{3} \end{cases}.$$

Vậy, đường thẳng có phương trình: $\frac{c}{2}x-\frac{c}{3}y=c \Leftrightarrow 3x-2y=6$.

Ví dụ 3: *Xác định các hệ số* a, b *của phương trình*: $ax^2-x+b=0$. *biết nó có hai nghiệm* $x_1=-2$ *và* $x_2=3$.

Giải

Với giả thiết:

- $x_1=-2$ là nghiệm của phương trình, suy ra:
$$a(-2)^2-(-2)+b=0 \Leftrightarrow 4a+b=-2. \quad (1)$$
- $x_2=3$ là nghiệm của phương trình, suy ra:
$$a.3^2-3+b=0 \Leftrightarrow 9a+b=3. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4a+b=-2 \\ 9a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a=5 \\ 9a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 9.1+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có dạng $x^2-x-6=0$.

Ví dụ 4: (Bài 25/tr 19 – Sgk): *Ta biết rằng một đa thức bằng* 0 *khi và chỉ khi tất cả các hệ số của nó bằng* 0. *Hãy tìm các giá trị của* m *và* n *để đa thức sau (với biến số* x*) bằng đa thức* 0:

$$P(x)=(3m-5n+1)x+(4m-n-10).$$

Giải

Ta có:

$$P(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-5n+1=0 \\ 4m-n-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-5n=-1 \\ 4m-n=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m-5n=-1 \\ -20m+5n=-50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-5n=-1 \\ -17m=-51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=2 \\ m=3 \end{cases}.$$

Vậy, với n = 2 và m = 3 thì đa thức P(x) thoả mãn đề bài.

Ví dụ 5: *Cho đa thức*: $f(x)=ax^3-(2-a)x^2+(5-3b)x-4b$.

a. *Xác định các hệ số* a, b *của đa thức, biết nó chia hết cho* $x-3$ *và* $x+1$.

b. *Với* a, b *tìm được ở trên, hãy phân tích đa thức* f(x) *thành nhân tử.*

Giải

a. Với giả thiết:

- f(x) chia hết x – 3, suy ra:

$$f(3)=0 \Leftrightarrow a.3^3-(2-a).3^2+(5-3b).3-4b=0$$
$$\Leftrightarrow 36a-13b=3. \quad (1)$$

- f(x) chia hết x + 1, suy ra:

$$f(-1)=0 \Leftrightarrow a.(-1)^3-(2-a).(-1)^2+(5-3b).(-1)-4b=0$$
$$\Leftrightarrow b=-7. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases}36a-13b=3\\ b=-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}36a-13.(-7)=3\\ b=-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{22}{9}\\ b=-7\end{cases}.$$

b. Với kết quả trên, f(x) có dạng:

$$f(x)=-\frac{22}{9}x^3-(2+\frac{22}{9})x^2+(5+21)x+28$$
$$=-\frac{22}{9}x^3-\frac{40}{9}x^2+26x+28=(x-3)(x+1)\left(-\frac{22}{9}x-\frac{28}{3}\right).$$

☛ ***Nhận xét***: Để thực hiện được ví dụ trên, chúng ta đã sử dụng tới kết quả:

"Một đa thức f(x) *chia hết cho* x – a *khi và chỉ khi* f(a) = 0 ".

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases}2x+7y=9\\ 3x-y=2\end{cases}$.

b. $\begin{cases}x+2y=20\\ 3x-2y=12\end{cases}$.

c. $\begin{cases}2x+7y=1\\ 3x+5y=-4\end{cases}$.

d. $\begin{cases}3x+5y=9\\ 2x-4y=-5\end{cases}$.

Bài 2: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}\\ x+y=10\end{cases}$.

b. $\begin{cases}\dfrac{y^2+2x-8}{y}=y-3\\ x+y=10\end{cases}$.

Bài 3: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases}\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{y}=1\\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=-1\end{cases}$.

b. $\begin{cases}\dfrac{5}{x+3}-\dfrac{9}{y-2}=100\\ \dfrac{3}{x+3}+\dfrac{7}{y-2}=308\end{cases}$.

Bài 4: Cho hàm số: $y = ax + b$.

Xác định các hệ số a, b của hàm số, biết rằng đồ thị hàm số của nó đi qua hai điểm:

a. A(1, 3) và B(3, 2). b. A(1, −1) và B(3, 3).

Bài 5: Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm:

a. A(1, 3) và B(3, 2). b. A(1, −1) và B(3, 3).

Bài 6: Cho phương trình: $x^2 - ax + b = 0$.

Xác định các hệ số a, b của phương trình, biết nó có hai nghiệm:

a. $x_1 = 1$ và $x_2 = 3$. b. $x_1 = -3$ và $x_2 = 2$.

Bài 7: Cho đa thức: $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - a$.

Xác định các hệ số a, b của đa thức, biết nó chia hết cho $x - 1$ và $x - 3$.

Bài 8: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 0 \\ mx + y = m + 1 \end{cases}$.

a. Chứng tỏ rằng với mọi m hệ luôn có nghiệm duy nhất.

b. Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm (x, y) thoả mãn $x < 1$ và $y < 1$.

Bài 9: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$.

a. Giải hệ phương trình với $m = -1$.

b. Chứng tỏ rằng với mọi $m \neq \pm 1$ hệ luôn có nghiệm duy nhất thoả mãn $x - y = 1$.

c. Tìm giá trị của m để nghiệm duy nhất (x, y) của hệ thoả mãn $x^2 - y^2 < 0$.

d. Tìm m nguyên để hệ có nghiệm nguyên duy nhất.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: a. (1, 1). b. (8, 6). c. (−3, 1). d. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Bài 2: a. (4, 6). b. (1, 2).

Bài 3:

a. Điều kiện $x, y \neq 0$.

Đặt $\frac{1}{x} = u$ và $\frac{1}{y} = v$, hệ được chuyển về dạng:

$$\begin{cases} 5u + 3v = 1 \\ 2u + v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u + 3v = 1 \\ -6u - 3v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -u = 4 \\ 5u + 3v = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = -4 \\ 5(-4) + 3v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -4 \\ v = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = -4 \\ \frac{1}{y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{7} \end{cases}.$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{7})$.

b. Điều kiện $x \neq -3$ và $y \neq 2$.

Đặt $\frac{5}{x+3} = 2u$ và $\frac{9}{y-2} = 2v$, hệ được chuyển về dạng:

$$\begin{cases} 5u - 9v = 50 \\ 3u + 7v = 154 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 28 \\ v = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{x+3} = 56 \\ \frac{9}{y-2} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{163}{56} \\ y = \frac{49}{20} \end{cases}.$$

Vậy, hệ có nghiệm $x = -\frac{163}{56}$ và $y = \frac{49}{20}$.

Bài 4:

a. Với giả thiết:

- A(1, 3) thuộc đồ thị hàm số, suy ra: $3 = a.1 + b \Leftrightarrow a + b = 3$. (1)
- B(3, 2) thuộc đồ thị hàm số, suy ra: $2 = a.3 + b \Leftrightarrow 3a + b = 2$. (2)

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 3a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -1 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{7}{2} \end{cases}.$$

Vậy, hàm số có dạng $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

b. Với giả thiết:

- A(1, −1) thuộc đồ thị hàm số, suy ra: $-1 = a.1 + b \Leftrightarrow a + b = -1$. (1)
- B(3, 3) thuộc đồ thị hàm số, suy ra: $3 = a.3 + b \Leftrightarrow 3a + b = 3$. (2)

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 4 \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2 + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}.$$

Vậy, hàm số có dạng $y = 2x - 3$.

Bài 5:

Giả sử đường thẳng có phương trình $ax + by = c$.

a. Với giả thiết:

- A(1, 3) thuộc đường thẳng, suy ra: $a.1 + b.3 = c \Leftrightarrow a + 3b = c$. (1)
- B(3, 2) thuộc đường thẳng, suy ra: $a.3 + b.2 = c \Leftrightarrow 3a + 2b = c$. (2)

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + 3b = c \\ 3a + 2b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 9b = 3c \\ 3a + 2b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7b = 2c \\ 3a + 2b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2c}{7} \\ 3a + 2.\frac{2c}{7} = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2c}{7} \\ a = \frac{c}{7} \end{cases}.$$

Vậy, đường thẳng có phương trình $\frac{c}{7}x + \frac{2c}{7}y = c \Leftrightarrow x + 2y = 7$.

b. Với giả thiết:

- A(1, −1) thuộc đường thẳng, suy ra:

$$a.1 + b.(-1) = c \Leftrightarrow a - b = c. \quad (1)$$

- B(3, 3) thuộc đường thẳng, suy ra:

$$a.3 + b.3 = c \Leftrightarrow 3a + 3b = c. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a-b=c \\ 3a+3b=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-3b=3c \\ 3a+3b=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a=4c \\ 3a+3b=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2c}{3} \\ 3.\dfrac{2c}{3}+3b=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2c}{3} \\ b=-\dfrac{c}{3} \end{cases}.$$

Vậy, đường thẳng có phương trình $\frac{2c}{3}x - \frac{c}{3}y = c \Leftrightarrow 2x - y = 3.$

Bài 6:

a. Với giả thiết:

- $x_1 = 1$ là nghiệm của phương trình, suy ra:

$$1^2 - a.1 + b = 0 \Leftrightarrow a - b = 1. \quad (1)$$

- $x_2 = 3$ là nghiệm của phương trình, suy ra:

$$3^2 - a.3 + b = 0 \Leftrightarrow 3a - b = 9. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a-b=1 \\ 3a-b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=8 \\ 3a-b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ 3.4-b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có dạng $x^2 - 4x + 3 = 0$.

b. $a = -1$ và $b = -6$.

Bài 7: Với giả thiết:

- f(x) chia hết x − 1, suy ra:

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 - a.1^2 + b.1 - a = 0 \Leftrightarrow 2a - b = 1. \quad (1)$$

- f(x) chia hết x − 3, suy ra:

$$f(3) = 0 \Leftrightarrow 3^3 - a.3^2 + b.3 - a = 0 \Leftrightarrow 10a - 3b = 27. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2a-b=1 \\ 10a-3b=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a-3b=3 \\ 10a-3b=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a=24 \\ 6a-3b=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ 6.6-3b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=11 \end{cases}.$$

CHỦ ĐỀ 5

GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Để giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Lập hệ phương trình.

- Chọn các ẩn và xác định điều kiện thích hợp cho ẩn. Chú ý phải ghi rõ đơn vị của ẩn
- Biểu thị các đại lượng chưa biết khác theo ẩn.
- Dựa vào các dữ kiện và điều kiện của bài toán để lập hệ phương trình.

Bước 2: Giải hệ phương trình.

Bước 3: Thử lại, nhận định kết quả và trả lời.

Các bài toán được đưa ra thường rơi vào một trong 5 dạng sau:

Dạng 1: Bài toán chuyển động.

Dạng 2: Bài toán về số và chữ số.

Dạng 3: Bài toán vòi nước.

Dạng 4: Bài toán về tỉ số và quan hệ giữa các số.

Dạng 5: Bài toán về phần trăm – năng suất.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Ví dụ 1: *Một ôtô dự định đi từ* A *đến* B *trong một thời gian nhất định. Nếu xe chạy với vận tốc* 35km/h *thì đến chậm mất* 2 *giờ. Nếu xe chạy với vận tốc* 50km/h *thì đến sớm hơn* 1 *giờ. Tính quãng đường* AB *và thời gian dự định đi lúc đầu.*

Giải

1. ***Lập hệ phương trình***

a. Lựa chọn ẩn

- Gọi x là thời gian dự định đi lúc đầu, điều kiện $x > 0$.
- Gọi y là độ dài quãng đường AB, điều kiện $y > 0$.

b. Thiết lập hai phương trình

Với giả thiết:

- Nếu xe chạy với vận tốc 35km/h thì đến chậm mất 2 giờ, ta được:

$$\frac{y}{35} = x + 2 \Leftrightarrow 35x - y = -70. \quad (1)$$

- Nếu xe chạy với vận tốc 50km/h thì đến sớm hơn 1 giờ, ta được:

$$\frac{y}{50} = x - 1 \Leftrightarrow 50x - y = 50. \quad (2)$$

c. Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 35x - y = -70 \\ 50x - y = 50 \end{cases} \quad (I)$$

2. ***Giải hệ phương trình***

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 15x = 120 \\ 50x - y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 350 \end{cases}$$, thoả mãn điều kiện.

3. ***Kết luận***: Vậy, quãng đường AB bằng 350km và thời gian dự định đi lúc đầu là 8 giờ.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên ta thấy:

1. Chúng ta lựa chọn hai ẩn x, y tương ứng cho hai giá trị cần tìm là độ dài quãng đường AB và thời gian dự kiến.
2. Việc thiết lập các phương trình (1) và (2) dựa trên phép so sánlh thời gian tới đích với thời gian dự kiến. Tuy nhiên, cũng có thể lập luận theo kiểu khác, cụ thể:
   - Nếu xe chạy với vận tốc 35km/h thì đến chậm mất 2 giờ, tức là số thời gian chạy bằng x + 2, do đó:
     $35(x + 2) = y$, (*vận tốc × thời gian = quãng đường*)
   - Nếu xe chạy với vận tốc 50km/h thì đến sớm hơn 1 giờ, tức là số thời gian chạy bằng x – 1, do đó:
     $50(x - 1) = y$, (*vận tốc × thời gian = quãng đường*)
3. Lời giải được trình bày thành ba phần độc lập nhau, với mục đích minh hoạ để giúp các em học sinh hiểu được cách trình bày bài toán theo thuật toán đã được chỉ ra. Tuy nhiên, kể từ các ví dụ sau chúng ta không cần phân tách như vậy mà chỉ yêu cầu các em học sinh khi đọc phải biết mình đang ở bước nào.

Ví dụ 2: *Lúc 7 giờ một người đi xe máy khởi hành từ A với vận tốc 40 km/h. Sau đó, lúc 8 giờ 30 phút, một người khác cũng đi xe máy từ A đuổi theo với vận tốc 60 km/h. Hỏi hai người gặp nhau lúc mấy giờ?*

✍ *Giải*

Ta thực hiện đổi đơn vị: 8 giờ 30 phút $= 8 + \frac{30}{60} = \frac{17}{2}$.

Gọi x là thời gian hai người gặp nhau, điều kiện $x > \frac{17}{2}$.

Gọi y là độ dài quãng đường từ A tới điểm gặp nhau, điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:

- Người thứ nhất đi với vận tốc 40 km/h và xuất phát lúc 7 giờ, ta được:

$40(x - 7) = y \Leftrightarrow 40x - y = 280.$ (1)

- Người thứ hai đi với vận tốc 60 km/h và xuất phát lúc 8 giờ 30 phút, ta được:

$$60(x - \frac{17}{2}) = y \Leftrightarrow 60x - y = 510. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 40x - y = 280 \\ 60x - y = 510 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11\frac{1}{2} = 11\text{giờ}30\text{phút} \\ y = 180 \end{cases}$.

Vậy, họ gặp nhau lúc 11 giờ 30 phút.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên ta thấy:

1. Cho dù bài toán chỉ yêu cầu " *Tìm thời điểm hai người gặp nhau* ", tương ứng với một ẩn xong chúng ta lại lựa chọn hai ẩn (một ẩn được đề xuất) để chuyển bài toán về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Khi đó:
   - Phương trình (1) được thiết lập dựa trên chuyển động của người thứ nhất.
   - Phương trình (2) được thiết lập dựa trên chuyển động của người thứ hai.
2. Để học sinh tiện so sánh, sau đây sẽ là lời giải khi ta lựa chọn hướng lập phương trình:
   Giả sử điểm họ gặp nhau là B. Gọi quãng đường AB là x, điều kiện $x > 0$.
   Suy ra:
   - Thời gian người thứ nhất đi từ A đến B là: $\frac{x}{40}$.
   - Thời gian người thứ hai đi từ A đến B là: $\frac{x}{60}$.

   Vì người thứ nhất đi sau người thứ hai 1 giờ 30 phút nên ta có:

$$\frac{x}{40} = \frac{x}{60} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3x = 2x + 180 \Leftrightarrow x = 180$$

   Vậy điểm gặp nhau của hai người cách A là 180 km.
   Để đi được quãng đường này:
   - Người thứ nhất phải đi mất $\frac{180}{40} = 4\frac{1}{2}$ (giờ).
   - Người thứ hai phải đi mất $\frac{180}{60} = 3$ (giờ).

   Vậy, họ gặp nhau lúc 11 giờ 30 phút.

Ví dụ 3: (Bài 43/tr 27 – Sgk): *Hai người ở hai địa điểm* A *và* B *cách nhau* 3,6km, *khởi hành cùng một lúc, đi ngược chiều nhau và gặp nhau ở một địa điểm cách* A *là* 2km. *Nếu cả hai cùng giữ nguyên vận tốc như trong trường hợp trên, nhưng người đi chậm xuất phát trước người kia* 6 phút *thì họ sẽ gặp nhau ở chính giữa quãng đường. Tính vận tốc của mỗi người.*

Giải

Đổi: 6 phút = $\frac{1}{10}$ giờ.

Gọi x là vận tốc của người đi nhanh hơn (x > 0, đơn vị: km/h)

y là vận tốc của người đi chậm hơn (y > 0, đơn vị: km/h)

Hai người khởi hành cùng một lúc, đi ngược chiều nhau và gặp nhau ở một địa điểm cách A là 2km (nghĩa là cách B là 1,6km). Lúc đó:

- Người đi nhanh mất $\frac{2}{x}$ (h).
- Người đi chậm mất $\frac{1,6}{y}$ (h).

Do đó, ta có phương trình: $\frac{2}{x} = \frac{1,6}{y}$ (1)

Nếu cả hai cùng giữ nguyên vận tốc như trong trường hợp trên, nhưng người đi chậm xuất phát trước người kia 6 phút thì họ sẽ gặp nhau ở chính giữa quãng đường. Lúc đó:

- Người đi nhanh mất $\frac{1,8}{x}$ (h).
- Người đi chậm mất $\frac{1,8}{y} + \frac{1}{10}$ (h).

Do đó, ta có phương trình: $\frac{1,8}{x} = \frac{1,8}{y} + \frac{1}{10}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ: $\begin{cases} \frac{2}{x} = \frac{1,6}{y} \\ \frac{1,8}{x} = \frac{1,8}{y} + \frac{1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2,5 \\ y = 2 \end{cases}$.

Vậy, vận tốc của người đi nhanh là 2,5km/h và vận tốc của người đi chậm là 2km/h.

Ví dụ 4: *Hai canô cùng khởi hành từ bến* A *và* B *cách nhau* 85km, *đi ngược chiều nhau. Sau* 1 giờ 40 phút *thì gặp nhau. Tính vận tốc riêng của mỗi canô. Biết rằng vận tốc riêng của canô đi xuôi lớn hơn vận tốc riêng của canô đi ngược* 9km/h *và vận tốc nước là* 3km/h.

Giải

Ta thực hiện đổi đơn vị: 1 giờ 40 phút = $1 + \frac{40}{60} = \frac{5}{3}$ giờ.

Gọi x là vận tốc riêng của canô đi xuôi dòng, điều kiện x > 0. Do đó, khi đi xuôi dòng nó đi với vận tốc (x + 3) km/h.

Gọi y là vận tốc riêng của canô đi ngược dòng, điều kiện $y > 3$. Do đó, khi đi ngược dòng nó đi với vận tốc $(y - 3)$ km/h.

Với giả thiết:

- Vận tốc riêng của canô đi xuôi lớn hơn vận tốc riêng của canô đi ngược 9km/h, ta được: $x - y = 9$. (1)
- Sau 1 giờ 40 phút hai canô gặp nhau, ta được:

$$\frac{5}{3}[(x + 3) + (y - 3)] = 85 \Leftrightarrow x + y = 51. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 9 \\ x + y = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 21 \end{cases}$.

Vậy:

- Vận tốc riêng của canô đi xuôi bằng 30km/h.
- Vận tốc riêng của canô đi ngược bằng 21km/h.

☛ ***Chú ý***: Nếu thay giả thiết "*Vận tốc riêng của canô đi xuôi lớn hơn vận tốc riêng của canô đi ngược 9km/h*" bằng "*Vận tốc canô đi xuôi lớn hơn vận tốc canô đi ngược 9km/h*" thì phương trình được minh hoạ bằng:

$$(x + 3) - (y - 3) = 9 \Leftrightarrow x - y = 15.$$

Khi đó, hệ phương trình có dạng: $\begin{cases} x - y = 15 \\ x + y = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 33 \\ y = 18 \end{cases}$.

Vậy, ta có:

- Vận tốc riêng của canô đi xuôi bằng 33km/h.
- Vận tốc riêng của canô đi ngược bằng 18km/h.

Ví dụ 5: (Bài 37/tr 24 – Sgk): *Hai vật chuyển động đều trên một đường tròn đường kính* 20cm, *xuất phát cùng một lúc, từ cùng một điểm. Nếu chuyển động cùng chiều thì cứ* 20 giây *chúng lại gặp nhau. Nếu chuyển động ngược chiều thì cứ* 4 giây *chúng lại gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi vật.*

✍ *Giải*

Gọi x và y là vận tốc của các vật ($x, y > 0$; đơn vị: cm/s)

- Nếu chuyển động cùng chiều thì cứ 20 giây chúng lại gặp nhau.

  Do đó, ta có: $\frac{20\pi}{x - y} = 20$.

- Nếu chuyển động ngược chiều thì cứ 4 giây chúng lại gặp nhau.

  Do đó, ta có: $\frac{20\pi}{x + y} = 4$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{20\pi}{x-y}=20 \\ \dfrac{20\pi}{x+y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20\pi = 20x-20y \\ 20\pi = 4x+4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3\pi \\ y=2\pi \end{cases}$.

Vậy, vận tốc vật thứ nhất là 3π cm/s và vận tốc vật thứ hai là 2π cm/s.

Vấn đề 2: BÀI TOÁN VỀ SỐ VÀ CHỮ SỐ

Ví dụ 1: *Tìm số có hai chữ số, biết rằng tổng của chữ số hàng đơn vị và hai lần chữ số hàng chục bằng 10. Ngoài ra, nếu đổi chỗ chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì sẽ được số mới nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị.*

Giải

Gọi số có hai chữ số là $\overline{xy} = 10x + y$, với $x, y \in N$, $1 \le x, y \le 9$.

Với giả thiết:

- Tổng của chữ số hàng đơn vị và hai lần chữ số hàng chục bằng 10, ta được:
$$2x + y = 10. \quad (1)$$
- Nếu đổi chỗ chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì sẽ được số mới ($\overline{yx} = 10y + x$) nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị, ta được:
$$\overline{xy} - \overline{yx} = 18 \Leftrightarrow (10x + y) - (10y + x) = 18 \Leftrightarrow x - y = 2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y=10 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, số cần tìm là 42.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên ta thấy:

1. Cho dù bài toán chỉ yêu cầu chúng ta đi tìm một số có hai chữ số (điều này có thể khiến học sinh hiểu nhầm rằng chỉ có một ẩn) nhưng cần hiểu rằng, số cần tìm được xây dựng từ hai thành phần. Do đó, chúng ta lựa chọn hai ẩn x, y tương ứng cho chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị. Và vì chúng là các chữ số đại diện nên phải thuộc tập {0, 1, 2, 3,..., 9} song ở đây không thể là 0 bởi các số $\overline{0y}$, $\overline{0x}$ không phải là số có hai chữ số.
2. Việc thiết lập phương trình (1) là đơn giản, còn đối với phương trình (2) chúng ta cần tới kiến thức về biểu diễn số, cụ thể:
$$\overline{xy} = 10x + y,$$
$$\overline{xyz} = 100x + 10y + z, \ldots$$

Ví dụ 2: *Tìm một số có hai chữ số. Biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị 6 đơn vị. Nếu viết xen chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì số tự nhiên đó tăng 720 đơn vị.*

Giải

Gọi số có hai chữ số là $\overline{xy} = 10x + y$, với $x, y \in \mathbf{N}, 1 \le x \le 9, 0 \le y \le 9$.

Với giả thiết:

- Chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị 6 đơn vị, ta được:

$$x - y = 6. \quad (1)$$

- Khi viết xen chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị (được số $\overline{x0y} = 100x + y$) thì số tự nhiên đó tăng 720 đơn vị, ta được:

$$(100x + y) - (10x + y) = 720 \Leftrightarrow x = 8. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 6 \\ x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$.

Vậy, số cần tìm là 82.

Vấn đề 3: BÀI TOÁN VÒI NƯỚC

Ví dụ 1: *Một máy bơm muốn bơm đầy nước vào bể trong một thời gian quy định thì mỗi giờ phải bơm* $10m^3$. *Sau khi bơm được* $\frac{1}{3}$ *bể, người công nhân vận hành máy cho hoạt động với công suất* $15m^3/h$. *Do vậy so với quy định bể được bơm đầy trước* 48 phút. *Tính thể tích của bể.*

Giải

Ta thực hiện đổi đơn vị 48 phút $= \frac{48}{60} = \frac{12}{15}$ giờ.

Gọi x (giờ) là thời gian quy định để bơm đầy bể, điều kiện $x > 0$.

Gọi y (m^3) là thể tích của bể, điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:

- Muốn bơm đầy nước vào bể trong thời gian x mỗi giờ phải bơm $10m^3$, ta được:

$$10x = y. \quad (1)$$

- Sau khi bơm được $\frac{1}{3}$ bể (tức bơm được $\frac{y}{3}$ m^3 và tốn $\frac{y}{3.10}$ giờ và còn lại $\frac{2y}{3}$ m^3), người công nhân vận hành máy cho hoạt động với công suất $15m^3/h$ (tức là tốn $\frac{2y}{3.15}$ giờ). Do vậy so với quy định bể được bơm đầy trước 48 phút (tức là mất $x - \frac{12}{15}$), ta được:

$$\frac{y}{3.10} + \frac{2y}{3.15} = x - \frac{12}{15} \Leftrightarrow 90x - 7y = 72. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 10x = y \\ 90x - 7y = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3{,}6 \\ y = 36 \end{cases}$$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, thể tích của bể bằng 36 m^3.

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên ta thấy:

1. Cho dù bài toán chỉ yêu cầu " *Tính thể tích của bể*", tương ứng với một ẩn, xong chúng ta lại lựa chọn hai ẩn (một ẩn được đề xuất) để chuyển bài toán về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Khi đó:
   - Phương trình (1) được thiết lập dựa trên quy định chung.
   - Phương trình (2) được thiết lập dựa trên việc thực hiện bơm trong thực tế.
2. Để học sinh tiện so sánh, sau đây sẽ là lời giải khi ta lựa chọn hướng lập phương trình:

   Gọi thể tích của bể là x (m^3), điều kiện x > 0. Suy ra:

   - Thời gian dự định để bơm đầy bể là: $\frac{x}{10}$.
   - Với $\frac{1}{3}$ bể (bằng $\frac{x}{3}$) bơm theo quy định mỗi giờ phải bơm 10m^3 nên mất $\frac{x}{3}.\frac{1}{10} = \frac{x}{30}$ (giờ).
   - Với $\frac{2}{3}$ bể còn lại (bằng $\frac{2x}{3}$), công suất của máy là 15m^3/h nên mất $\frac{2x}{3}.\frac{1}{15} = \frac{2x}{45}$ (giờ).

   Vậy thời gian thực tế để bơm đầy bể là: $\frac{x}{30} + \frac{2x}{45}$

   Vì so với quy định bể được bơm đầy trước 48 phút nên ta có phương trình:

   $$\frac{x}{10} - (\frac{x}{30} + \frac{2x}{45}) = \frac{12}{15} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2x = 72 \Leftrightarrow x = 36$$, thoả mãn.

   Vậy, thể tích của bể nước là 36m^3.

Ví dụ 2: (Bài 32/tr 23 – Sgk): *Hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước cạn (không có nước) thì sau* $4\frac{4}{5}$ *giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất và* 9 *giờ sau mới mở thêm vòi thứ hai thì sau* $\frac{6}{5}$ *giờ nữa mới đầy bể. Hỏi nếu ngay từ đầu chỉ mở vòi thứ hai thì sau bao lâu sẽ đầy bể.*

Giải

Gọi x và y là thời gian để vòi thứ nhất và vòi thứ hai chảy một mình thì đầy bể ($x > 0$; $y > 0$; đơn vị: giờ).

Do đó:

- Trong 1 giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ phần của bể.
- Trong 1 giờ vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ phần của bể.
- Trong 1 giờ cả hai vòi chảy được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ phần của bể.

Hai vòi cùng chảy thì trong $4\frac{4}{5} = \frac{24}{5}$ giờ sẽ đầy bể, nên mỗi giờ hai vòi chảy được $1 : \frac{24}{5} = \frac{5}{24}$ (bể). Do đó ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24}$ (1)

Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất và 9 giờ sau mới mở thêm vòi thứ hai thì sau $\frac{6}{5}$ giờ nữa mới đầy bể. Do đó ta có phương trình: $\frac{9}{x} + \frac{5}{24}.\frac{6}{5} = 1$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{24} \\ \frac{9}{x}+\frac{5}{24}.\frac{6}{5}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{24} \\ \frac{9}{x}+\frac{1}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{24} \\ \frac{9}{x}+\frac{1}{4}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{24} \\ 36+x=4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{24} \\ x=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8 \\ x=12 \end{cases}.$$

Vậy, nếu vòi thứ hai chảy một mình thì sau 8 giờ sẽ đầy bể.

Ví dụ 3: (Bài 38/tr 24 – Sgk): *Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau* 1 giờ 20 phút *sẽ đầy. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong* 10 phút *và vòi thứ hai chảy trong* 12 phút *thì đầy* $\frac{2}{15}$ *bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu mới đầy bể?*

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Thiết lập ẩn thông qua giá trị cần tìm.

Gọi x là thời gian để vòi I chảy một mình cho đầy bể, điều kiện $x > 0$. Suy ra, mỗi giờ vòi I chảy được $\frac{1}{x}$ bể.

Gọi y là thời gian để vòi II chảy một mình cho đầy bể, điều kiện $y > 0$. Suy ra, mỗi giờ vòi II chảy được $\frac{1}{y}$ bể.

Ta thực hiện đổi đơn vị:

$$1 \text{ giờ } 20 \text{ phút} = 1 + \frac{20}{60} = \frac{4}{3} \text{ giờ}; \quad 10 \text{ phút} = \frac{1}{6} \text{ giờ}; \quad 12 \text{ phút} = \frac{1}{5} \text{ giờ}.$$

Với giả thiết:

- Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 1 giờ 20 phút sẽ đầy, ta được: $\frac{4}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4}$ (1)
- Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ hai chảy trong 12 phút thì đầy $\frac{2}{15}$ bể, ta được: $\frac{1}{6}.\frac{1}{x} + \frac{1}{5}.\frac{1}{y} = \frac{2}{15} \Leftrightarrow \frac{1}{6x} + \frac{1}{5y} = \frac{2}{15}$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6x} + \frac{1}{5y} = \frac{2}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{6x} + \frac{5}{5y} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6x} + \frac{1}{5y} = \frac{2}{15} \end{cases}. \quad (I)$$

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{6x} \\ v = \frac{1}{5y} \end{cases}$

khi đó, hệ có dạng: $\begin{cases} 6u + 5v = \frac{3}{4} \\ u + v = \frac{2}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{12} \\ v = \frac{1}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6x} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{5y} = \frac{1}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$.

Vậy, ta được:

- Vòi I chảy trong 2 giờ sẽ đầy bể.
- Vòi II chảy trong 4 giờ sẽ đầy bể.

Cách 2: Thiết lập ẩn thông qua giá trị trung gian.

Giả sử mỗi giờ vòi I chảy được x phần bể, điều kiện $x > 0$.

Giả sử mỗi giờ vòi II chảy được y phần bể, điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:

- Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 1 giờ 20 phút sẽ đầy, ta được: $\frac{4}{3}(x + y) = 1 \Leftrightarrow 4x + 4y = 3$. (3)

- Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ hai chảy trong 12 phút thì đầy $\frac{2}{15}$ bể, ta được: $\frac{1}{6}.x + \frac{1}{5}.y = \frac{2}{15} \Leftrightarrow 5x + 6y = 4.$ (4)

Từ (3) và (4), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 4x + 4y = 3 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{4}..$

Vậy ta được:

- Vòi I chảy trong 2 giờ sẽ đầy bể.
- Vòi II chảy trong 4 giờ sẽ đầy bể.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, thông qua hai cách giải của ví dụ trên ta thấy:

1. Với cách 1, việc lựa chọn ẩn thông qua các giá trị cần tìm giúp cho cách đặt vấn đề khá tường minh. Tuy nhiên, chúng ta lại phải đối mặt với một hệ phức tạp (ở đó cần sử dụng phương pháp ẩn phụ để giải).
2. Với cách 2, việc lựa chọn ẩn thông qua giá trị trung gian cần có được những kiến thức đánh giá đúng đắn, xong sẽ giúp chúng ta thu được một hệ đơn giản.

Vấn đề 4: BÀI TOÁN VỀ TỈ SỐ VÀ QUAN HỆ GIỮA CÁC SỐ

Ví dụ 1: (Bài 34/tr 24 – Sgk): *Nhà Lan có một mảnh vườn trồng rau cải bắp. Vườn được đánh thành nhiều luống, mỗi luống trồng cùng một loại cây cải bắp. Lan tính rằng: Nếu tăng thêm 8 luống rau, nhưng mỗi luống trồng ít đi 3 cây thì số cây toàn vườn ít đi 54 cây. Nếu giảm đi 4 luống, nhưng mỗi luống trồng tăng thêm 2 cây thì số rau toàn vườn sẽ tăng thêm 32 cây. Hỏi vườn nhà Lan trồng bao nhiêu cây cải bắp?*

✍ *Giải*

Gọi x là số luống rau mà Lan trồng ($x \in N^*$)

y là số cây cải bắp mà Lan trồng trên mỗi luống ($y \in N^*$).

Nếu tăng thêm 8 luống rau, nhưng mỗi luống trồng ít đi 3 cây thì số cây toàn vườn ít đi 54 cây. Do đó, ta có phương trình:

$$xy - (x + 8)(y - 3) = 54 \quad (1)$$

Nếu giảm đi 4 luống, nhưng mỗi luống trồng tăng thêm 2 cây thì số rau toàn vườn sẽ tăng thêm 32 cây. Do đó, ta có phương trình:

$$(x - 4)(y + 2) - xy = 32 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy - (x + 8)(y - 3) = 54 \\ (x - 4)(y + 2) - xy = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 8y = 30 \\ 2x - 4y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 15 \end{cases}.$$

Vậy số bắp cải trồng trong vườn nhà Lan là: $50 \times 15 = 750$ (cây).

Ví dụ 2: (Bài 31/tr 23 – Sgk): *Tính độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông, biết rằng nếu tăng mỗi cạnh lên* 3cm *thì diện tích tam giác đó sẽ tăng thêm* $36cm^2$, *và nếu một cạnh giảm đi* 2cm, *cạnh kia giảm đi* 4cm *thì diện tích của tam giác giảm đi* $26cm^2$.

Giải

Gọi x và y là độ dài của hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông (x.,y > 0, đơn vị: cm).

Nếu tăng mỗi cạnh lên 3cm thì diện tích tam giác đó sẽ tăng thêm $36cm^2$. Do đó, ta có phương trình:

$$\frac{(x+3)(y+3)}{2} - \frac{xy}{2} = 36 \Leftrightarrow (x+3)(y+3) - xy = 72 \qquad (1)$$

Nếu một cạnh giảm đi 2cm, cạnh kia giảm đi 4cm thì diện tích của tam giác giảm đi $26cm^2$. Do đó, ta có phương trình:

$$\frac{xy}{2} - \frac{(x-2)(y-4)}{2} = 26 \Leftrightarrow xy - (x-2)(y-4) = 52 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x+3)(y+3)-xy=72\\xy-(x-2)(y-4)=52\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+3y=63\\4x+2y=60\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=9\\y=12\end{cases}$$

Vậy, độ dài hai cạnh của góc vuông là 9cm và 12cm.

Ví dụ 3: *Trong một trang sách, nếu bớt đi* 4 *dòng và mỗi dòng bớt đi* 3 *chữ thì cả trang sẽ bớt đi* 136 *chữ, nếu tăng thêm* 3 *dòng và mỗi dòng tăng thêm* 2 *chữ thì cả trang sẽ tăng* 109 *chữ. Tính số dòng trong trang và số chữ của mỗi dòng.*

Giải

Gọi x là số dòng trong trang sách, điều kiện $0 < x \in N$.

Gọi y là số chữ trong mỗi dòng, điều kiện $0 < y \in N$.

Với giả thiết:

- Nếu bớt đi 4 dòng (ứng với việc bớt 4y chữ và trang còn lại x – 4 dòng) và mỗi dòng bớt đi 3 chữ (ứng với 3(x–4)) thì cả trang sẽ bớt đi 136 chữ, ta được: $4y + 3(x-4) = 136 \Leftrightarrow 3x + 4y = 148$. (1)
- Nếu mỗi dòng tăng thêm 2 chữ (trang tăng được 2x chữ và mỗi dòng có y + 2 chữ) và tăng thêm 3 dòng (tăng được 3(y + 2) chữ) thì cả trang sẽ tăng 109 chữ, ta được: $2x + 3(y + 2) = 109 \Leftrightarrow 2x + 3y = 103$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases}3x+4y=148\\2x+3y=103\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=32\\y=13\end{cases}$.

Vậy, trang sách có 32 dòng và mỗi dòng có 13 chữ.

☞ *Nhận xét*: Như vậy, trong lời giải của thí dụ trên ta thấy:

1. Lựa chọn hai ẩn x, y tương ứng với số dòng trong trang sách và số chữ trong mỗi dòng.
2. Việc thiết lập các phương trình (1) và (2) dựa trên số dư khi thêm hoặc bớt do đó cần có nhận định thật chính xác.

Vấn đề 5: BÀI TOÁN VỀ PHẦN TRĂM – NĂNG SUẤT

Ví dụ 6: *Có hai phân xưởng, phân xưởng* I *làm trong* 20 *ngày, phân xưởng* II *làm trong* 15 *ngày, được tất cả* 1600 *dụng cụ. Biết số dụng cụ phân xưởng* I *làm trong* 4 *ngày bằng số dụng cụ phân xưởng* II *làm trong* 5 *ngày. Tính số dụng cụ của mỗi phân xưởng đã làm.*

✍ *Giải*

Gọi x là số dụng cụ phân xưởng I làm trong 1 ngày, điều kiện $0 < x \in \mathbf{N}$.

Gọi y là số dụng cụ phân xưởng II làm trong 1 ngày, điều kiện $0 < y \in \mathbf{N}$.

Với giả thiết:

- Cả hai phân xưởng làm được 1600 sản phẩm, ta được:
$$20x + 15y = 1600 \Leftrightarrow 4x + 3y = 320. \quad (1)$$
- Số dụng cụ phân xưởng I làm trong 4 ngày bằng số dụng cụ phân xưởng II làm trong 5 ngày, ta được: $4x = 5y$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 4x + 3y = 320 \\ 4x = 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \end{cases}$, thoả mãn điều kiện.

Vậy phân xưởng I làm được 50 sản phẩm và phân xưởng II làm được 40 sản phẩm một ngày.

Ví dụ 7: (Bài 45/tr 27 – Sgk): *Hai đội xây dựng làm chung một công việc và dự định hoàn thành trong* 12 ngày. *Nhưng khi làm chung được* 8 ngày *thì đội* I *được điều động đi làm việc khác. Tuy chỉ còn một mình đội* II *làm việc, nhưng do cải tiến cách làm, năng suất của đội* II *tăng gấp đôi, nên họ đã làm xong phần việc còn lại trong* 3,5 ngày. *Hỏi với năng suất ban đầu, nếu mỗi đội làm một mình thì phải làm trong bao nhiêu lâu mới xong công việc trên?*

✍ *Giải*

Gọi x, y theo thứ tự là thời gian mà mỗi đội làm một mình thì hoàn thành công việc, với năng suất ban đầu ($x, y > 0$; đơn vị: ngày).

Trong một ngày:

- Đội I hoàn thành được $\frac{1}{x}$ công việc.
- Đội II hoàn thành được $\frac{1}{y}$ công việc.

- Cả hai đội hoàn thành được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ công việc.

Do đó, ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$ (1)

Trong 8 ngày cả hai đội làm được: $8.\ \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$.

Số công việc còn lại là: $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Sau khi đội I nghỉ, năng suất đội 2 tăng lên gấp đôi và họ phải hoàn thành phần công việc còn lại trong 3,5 ngày. Do đó, ta có phương trình:

$$\frac{1}{3} : \frac{2}{y} = 3{,}5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} : \frac{2}{y} = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 28 \\ y = 21 \end{cases}$.

Vậy, nếu phải làm một mình thì đội I sau 28 ngày sẽ hoàn thành công việc và đội II sau 21 ngày sẽ hoàn thành công việc.

Ví dụ 1: *Một tập đoàn đánh cá dự định trung bình mỗi tuần bắt được 20 tấn cá. Nhưng trong thực tế họ đã vượt mức kế hoạch 6 tấn một tuần nên chẳng những đã hoàn thành sớm một tuần mà còn vượt mức 10 tấn nữa. Tính định mức kế hoạch đã định.*

Giải

Gọi x (tuần) là thời gian thực hiện định mức kế hoạch, điều kiện $x > 0$.

Gọi y (tấn) là định mức kế hoạch, điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:

- Dự định trung bình mỗi tuần bắt được 20 tấn cá, ta được:

$$20x = y. \quad (1)$$

- Do họ đã vượt mức kế hoạch 6 tấn một tuần (tức là, mỗi tuần đánh được 20 + 6 = 26 tấn) nên chẳng những đã hoàn thành sớm một tuần (tức là, chỉ thực hiện trong x – 1 tuần) mà còn vượt mức 10 tấn nữa (tức là đánh được y + 10 tấn), ta được:

$$26(x - 1) = y + 10 \Leftrightarrow 26x - y = 36. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} 20x = y \\ 26x - y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 120 \end{cases}$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, định mức kế hoạch đã định bằng 120 tấn.

☞ *Nhận xét*: Như vậy, trong lời giải của thí dụ trên ta thấy:

1. Cho dù bài toán chỉ yêu cầu " *Tính định mức kế hoạch đã định* ", tương ứng với một ẩn, xong chúng ta lại lựa chọn hai ẩn (một ẩn được đề xuất) để chuyển bài toán về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Khi đó:
   - Phương trình (1) được thiết lập dựa trên định mức trong kế hoạch.
   - Phương trình (2) được thiết lập dựa trên việc thực hiện kế hoach trong thực tế.
2. Để học sinh tiện so sánh, sau đây sẽ là lời giải khi ta lựa chọn hướng lập phương trình:
   Gọi x (tấn) là mức kế hoạch đã định, điều kiện $x > 0$. Suy ra:
   - Thời gian dự định là: $\frac{x}{20}$ (tuần).
   - Khối lượng thực tế đánh bắt được trong một tuần là $20 + 6 = 26$ (tấn) và khối lượng thực tế đánh bắt được là $x + 10$ (tấn). Suy ra, thời gian thực tế đánh bắt là: $\frac{x+10}{26}$ (tuần).
   - Vì tập đoàn đã hoàn thành công việc sớm hơn so với dự định một tuần nên ta có phương trình:
     $$\frac{x+10}{26} = \frac{x}{20} - 1 \Leftrightarrow 6x - 500 = 0 \Leftrightarrow x = 120.$$

   Vậy, tập đoàn dự định đánh bắt 120 tấn cá.

Ví dụ 2: *Trong tháng 3 hai tổ trồng được 720 cây xanh. Trong tháng 4, tổ I vượt mức 15%, tổ II vượt mức 12% nên trồng được 819 cây xanh. Tính xem trong tháng 3 mỗi tổ trồng được bao nhiêu cây xanh.*

✍ *Giải*

Gọi x là số cây xanh tổ I trồng được trong tháng 3, điều kiện $0 < x \in \mathbf{N}$.
Gọi y là số cây xanh tổ II trồng được trong tháng 3, điều kiện $0 < y \in \mathbf{N}$.
Với giả thiết:

- Trong tháng 3 hai tổ trồng được 720 cây xanh, ta được: $x + y = 720$. (1)
- Trong tháng 4, tổ I vượt mức 15% (trồng được $x + \frac{15}{100}x$), tổ II vượt mức 12% (trồng được $y + \frac{12}{100}y$) nên trồng được 819 cây xanh.

Ta được: $(x + \frac{15}{100}x) + (y + \frac{12}{100}y) = 819 \Leftrightarrow 115x + 112y = 81900.$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 720 \\ 115x + 112y = 81900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 420 \\ y = 300 \end{cases}$.

Vậy, trong tháng 3 tổ I trồng được 420 cây xanh và tổ II trồng được 300 cây xanh.

Ví dụ 8: (Bài 39/tr 25 – Sgk): *Một người mua hai loại hàng và phải trả tổng cộng 2,17 triệu đồng, kể cả thuế giá trị gia tăng (VAT) với mức 10% đối với loại hàng thứ nhất và 8% đối với loại hàng thứ hai. Nếu thuế VAT là 9% đối với cả hai loại hàng thì người đó phải trả tổng cộng 2,18 triệu đồng. Hỏi nếu không kể thuế VAT thì người đó phải trả bao nhiêu tiền cho mỗi loại hàng?*

Giải

Gọi x và y là giá tiền mỗi loại hàng, không kể thuế VAT (x,y > 0; đơn vị: triệu đồng).

Một người mua hai loại hàng và phải trả tổng cộng 2,17 triệu đồng, kể cả thuế giá trị gia tăng (VAT) với mức 10% đối với loại hàng thứ nhất và 8% đối với loại hàng thứ hai. Do đó, ta có: 110%x + 108%y = 2,17

Nếu thuế VAT là 9% đối với cả hai loại hàng thì người đó phải trả tổng cộng 2,18 triệu đồng. Do đó, ta có: 109%x + 109%y = 2,18

Do đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 110x + 108y = 217 \\ 109x + 109y = 218 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 110x + 108y = 217 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy, số tiền người đó mua mỗi loại là 500 000 đồng và 1 500 000 đồng.

Ví dụ 9: (Bài 46/tr 27 – Sgk): *Năm ngoái, hai đơn vị sản xuất nông nghiệp thu hoạch được 720 tấn thóc. Năm nay, đơn vị thứ nhất làm vượt mức 15%, đơn vị thứ hai làm vượt mức 12% so với năm ngoái. Do đó, cả hai đơn vị thu hoạch được 819 tấn thóc. Hỏi mỗi năm, mỗi đơn vị thu hoạch được bao nhiêu tấn thóc?*

Giải

Gọi x, y theo thứ tự là số thóc mỗi đơn vị thu hoạch được trong năm ngoái (x, y > 0; đơn vị: tấn).

Năm ngoái, hai đơn vị sản xuất nông nghiệp thu hoạch được 720 tấn thóc. Do đó: x + y = 720.

Năm nay, đơn vị thứ nhất làm vượt mức 15%, đơn vị thứ hai làm vượt mức 12% so với năm ngoái. Do đó: 15%x + 12%y = 819.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 720 \\ 150x + 120y = 819 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 420 \\ y = 300 \end{cases}$.

Vậy, trong năm ngoái đơn vị thứ nhất thu hoạch được 420 tấn, đơn vị thứ hai thu hoạch được 300 tấn.

Ví dụ 10: *Hai tổ sản xuất phải hoàn thành 90 sản phẩm. Tổ I vượt mức 115% kế hoạch của tổ. Tổ II vượt mức 12% kế hoạch của tổ. Do đó, cả hai tổ làm được 102 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch mỗi tổ phải làm bao nhiêu sản phẩm.*

Giải

Gọi x là số sản phẩm theo kế hoạch tổ I phải làm, điều kiện $0 < x \in \mathbf{N}$.

Gọi y là số sản phẩm theo kế hoạch tổ II phải làm, điều kiện $0 < y \in \mathbf{N}$.

Với giả thiết:

- Hai tổ sản xuất phải hoàn thành 90 sản phẩm, ta được:

$$x + y = 90. \quad (1)$$

- Tổ I vượt mức 15% kế hoạch của tổ (làm được $x + \frac{15}{100}x$). Tổ II vượt mức 12% kế hoạch của tổ (làm được $y + \frac{12}{100}y$). Do đó, cả hai tổ làm được 102 sản phẩm, ta được:

$$(x + \frac{15}{100}x) + (y + \frac{12}{100}y) = 102 \Leftrightarrow 115x + 112y = 10200. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ 115x + 112y = 10200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 50 \end{cases}$$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, theo kế hoạch:

- Tổ I phải làm 40 sản phẩm.
- Tổ II phải làm 50 sản phẩm.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm số tự nhiên có hai chữ số. Biết tổng các chữ số bằng 8, nếu đổi vị trí hai chữ số cho nhau thì số tự nhiên đó tăng lên 18 đơn vị.

Bài 2: Tìm số tự nhiên có hai chữ số. Biết rằng số đó bằng tổng các chữ số của nó cộng với 9 và số đó cũng bằng hai lần hiệu của hai chữ số của nó cộng với 20.

Bài 3: Tìm số tự nhiên có hai chữ số. Biết chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 5, nếu viết xen chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì số tự nhiên đó tăng 630 đơn vị.

Bài 4: Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 156, nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ thì được thương là 6 và số dư là 9.

Bài 5: Có hai đội thi công từ hai phía của một quãng đường dài 2400m. Mỗi ngày đội I làm được 40m, đội II làm được 60m. Hỏi mỗi đội làm được bao nhiêu mét đường. Biết rằng thời gian hai đội làm là như nhau.

Bài 6: Trong tuần đầu hai tổ sản xuất được 1500 bộ quần áo. Sang tuần thứ hai, tổ A vượt mức 25% kế hoạch, tổ B giảm 18%. Do đó, trong tuần này cả hai tổ sản xuất được 1617 bộ. Hỏi trong tuần đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu bộ ?

Bài 7: Một canô đi xuôi từ A đến B với vận tốc trung bình là 30 km/h sau đó đi ngược lại từ B về A. Tính quãng đường AB. Biết thời gian đi xuôi ít hơn thời gian đi ngược là 40 phút và vận tốc dòng nước là 3 km/h.

Bài 8: Một người đi xe đạp dự định đi hết quãng đường AB với vận tốc 10 km/h. Sau khi đi được nửa quãng đường với vận tốc dự định người ấy nghỉ 30 phút. Vì muốn đến B kịp giờ nên người ấy phải đi với vận tốc 15 km/h trên quãng đường còn lại. Tính quãng đường AB.

Bài 9: Một người đi xe đạp quãng đường AB dài 80 km. Sau 1 giờ 30 phút thì một người đi xe máy cũng đi quãng đường AB và đã đến B sớm hơn người đi xe đạp 1 giờ. Tính vận tốc mỗi xe biết vận tốc xe máy gấp 2,5 lần vận tốc xe đạp.

Bài 10: Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì chỉ hoàn thành được 25% công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

Bài 11: Một canô chạy trên sông trong 7 giờ, xuôi dòng 108 km và ngược dòng 63 km. Một lần khác, canô cũng chạy trong 7 giờ, xuôi dòng 81 km và ngược dòng 84 km. Tính vận tốc dòng nước chảy và vận tốc thật của canô. Biết vận tốc thật của canô không đổi.

Bài 12: Một ôtô đi quãng đường AB với vận tốc 50 km/h, rồi đi tiếp quãng đường BC với vận tốc 45 km/k. Biết quãng đường tổng cộng dài 165 km và thời gian ôtô đi trên AB ít hơn thời gian đi trên BC là 30 phút. Tính thời gian ôtô đi trên mỗi quãng đường.

Bài 13: Hai địa điểm A và B cách nhau 56 km. Lúc 6 giờ 45 phút, một người đi xe đạp từ A với vận tốc 10 km/h. Sau đó 2 giờ, một người đi xe đạp từ B với vận tốc 4 km/h. Hỏi đến mấy giờ họ gặp nhau và chỗ gặp nhau cách A bao nhiêu km ?.

Bài 14: Hai máy bơm cùng bơm nước vào một bể thì sau $\frac{1}{5}$ giờ thì đầy bể. Nếu máy bơm I bơm trong 10 phút, máy bơm II bơm trong 6 phút thì hai máy bơm được $\frac{7}{10}$ bể. Hỏi mỗi máy bơm làm việc một mình mất bao nhiêu giờ thì đầy bể?

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: Gọi số có hai chữ số là $\overline{xy} = 10x + y$, với $x, y \in N$, $1 \le x, y \le 9$.

Với giả thiết:

- Tổng của các chữ số bằng 8, ta được $x + y = 8$. (1)
- Nếu đổi vị trí hai chữ số cho nhau ($\overline{yx} = 10y + x$) thì số tự nhiên đó tăng lên 18 đơn vị, ta được:

$$\overline{yx} - \overline{xy} = 18 \Leftrightarrow (10y + x) - (10x + y) = 18 \Leftrightarrow x - y = -2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, số cần tìm là 35.

Bài 2: Gọi số có hai chữ số là $\overline{xy} = 10x + y$, với $x, y \in N$, $1 \le x \le 9$, $0 \le y \le 9$.

Với giả thiết:

- Số đó bằng tổng các chữ số của nó cộng với 9, ta được:

$$10x + y = x + y + 9 \Leftrightarrow 9x = 9 \Leftrightarrow x = 1. \quad (1)$$

ABC

- Số đó cũng bằng hai lần hiệu của hai chữ số của nó cộng với 20, ta được:

$$10x + y = 2(x - y) + 20 \Leftrightarrow 8x + 3y = 20. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình $\begin{cases} x = 1 \\ 8x + 3y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, số cần tìm là 145.

Bài 3: Gọi số có hai chữ số là $\overline{xy} = 10x + y$, với $x, y \in \mathbf{N}$, $1 \le x \le 9$, $0 \le y \le 9$.

Với giả thiết:

- Chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị 5 đơn vị, ta được:

$$x - y = 5. \quad (1)$$

- Khi viết xen chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị (được số $\overline{x0y} = 100x + y$) thì số tự nhiên đó tăng 630 đơn vị, ta được:

$$(100x + y) - (10x + y) = 630 \Leftrightarrow x = 7. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 5 \\ x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \end{cases}$.

Vậy, số cần tìm là 72.

Bài 4: Gọi hai số cần tìm là x và y, với $x > y$.

Với giả thiết:

- Tổng của chúng bằng 156, ta được: $x + y = 156$. (1)
- Nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ thì được thương là 6 và số dư là 9, ta được:

$$x = 6y + 9 \Leftrightarrow x - 6y = 9. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 156 \\ x - 6y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 135 \\ y = 21 \end{cases}$.

Vậy, hai số cần tìm là 135 và 21.

Bài 5: Đội I là được 960m và đội II làm được 1440m.

Bài 6: Gọi x là số bộ quần áo tổ I sản xuất được trong tuần đầu, điều kiện $0 < x \in \mathbf{N}$.

Gọi y là số bộ quần áo tổ II sản xuất được trong tuần đầu, điều kiện $0 < y \in \mathbf{N}$.

Với giả thiết:

- Trong tuần đầu hai tổ sản xuất được 1500 bộ quần áo, ta được:

$$x + y = 1500. \quad (1)$$

- Trong tuần thứ hai, tổ A vượt mức 25% kế hoạch, tổ B giảm 18%. Do đó, tron tuần này cả hai tổ sản xuất được 1617 bộ, ta được:

$$(x + \frac{25}{100}x) + (y - \frac{18}{100}y) = 1617 \Leftrightarrow 125x + 82y = 161700. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 1500 \\ 125x + 82y = 161700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 900 \\ y = 600 \end{cases}$.

Vậy, trong tuần đầu tổ I sản xuất được 900 bộ quần áo và tổ II sản xuất được 60 bộ quần áo.

Bài 7: Ta thực hiện đổi đơn vị: 40 phút = $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ giờ.

Gọi x là thời gian đi xuôi dòng, điều kiện $x > 0$.

Gọi y là độ dài quãng đường AB, điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:

- Canô đi xuôi từ A đến B với vận tốc trung bình là 30 km/h, ta được:

$$30x = y. \quad (1)$$

- Khi đi ngược dòng, chịu tác dụng của dòng nước với vận tốc dòng nước là 3 km/h (nên vận tốc còn lại 30 − 3 = 27 km/h) và thời gian đi xuôi ít hơn thời gian đi ngược là 40 phút (thời gian đi ngược bằng $x + \frac{2}{3}$), ta được:

$$27(x + \frac{2}{3}) = y \Leftrightarrow 27x - y = -18. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 30x = y \\ 27x - y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 180 \end{cases}$.

Vậy, quãng đường AB bằng 180 km.

Bài 8: Thực hiện đổi đơn vị 30 phút = $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$.

Gọi x (giờ) là thời gian dự định, điều kiện $x > 0$.

Gọi y (km) là độ dài quãng đường, điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:

- Vận tốc trung bình là 10 km/h, ta được: $10x = y$. (1)

- Sau khi đi được nửa quãng đường (bằng $\frac{y}{2}$) với vận tốc đó (thời gian đi bằng $\frac{y}{2.10}$ giờ) thì nghỉ 30 phút (bằng $\frac{1}{2}$ giờ). Quãng đường còn lại (bằng $\frac{y}{2}$), người đó đi bằng ôtô với vận tốc 15 km/h (thời gian đi bằng $\frac{y}{2.15}$ giờ) để đúng với dự định, ta được: $\frac{y}{20} + \frac{1}{2} + \frac{y}{30} = x \Leftrightarrow 12x - y = 6$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 10x = y \\ 12x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 30 \end{cases}$.

Vậy, quãng đường người đó phải đi là 30 km.

Bài 9: *Hướng dẫn*:

Gọi vận tốc của người đi xe đạp là x (km/h), điều kiện $x > 0$.

Gọi vận tốc của người đi xe máy là y (km/h), điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:

- Vận tốc xe máy gấp 2,5 lần vận tốc xe đạp, ta được: $y = 2,5x$. (1)

- Thời gian người đi xe đạp đi hết quãng đường bằng $\frac{80}{x}$.
- Thời gian người đi xe máy đi hết quãng đường bằng $\frac{80}{y}$

Do đó, ta được: $\frac{80}{x} = \frac{80}{y} - \frac{3}{2} - 1 \Leftrightarrow \frac{16}{x} - \frac{16}{y} = -\frac{1}{2}$. (2)

Từ 1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2,5x = y \\ \frac{16}{x} - \frac{16}{y} = -\frac{1}{2} \end{cases}$, *học sinh tự làm.*

Bài 10: Gọi x và y là thời gian mà mỗi người làm riêng thì hoàn thành công việc (x, y > 0; đơn vị: giờ). Do đó:

- Trong 1 giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ phần công việc.
- Trong 1 giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ phần công việc.
- Trong 1 giờ cả hai người cùng làm được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ phần công việc.

Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Do đó, ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \quad (1)$$

Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì chỉ hoàn thành được $25\% = \frac{1}{4}$ công việc. Do đó ta có phương trình: $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3}{16} \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{y} = \frac{1}{16} \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 48 \\ x = 24 \end{cases}.$$

Vậy, nếu làm một mình thì người thứ nhất phải làm trong 24 giờ và người thứ hai phải làm trong 48 giờ.

CHƯƠNG II – HÀM SỐ $y = ax^2$, $(a \neq 0)$
PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN SỐ

CHỦ ĐỀ 1

HÀM SỐ $y = ax^2$, $a \neq 0$

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Hàm số: $y = ax^2$, với $a \neq 0$,

1. Tập xác định của hàm số là **R**.
2. Tính chất biến thiên của hàm số:
   - Nếu $a > 0$, hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_-$, đồng biến trong $\mathbf{R}_+$ và bằng 0 khi $x = 0$.
   - Nếu $a < 0$, hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_-$, nghịch biến trong $\mathbf{R}_+$ và bằng 0 khi $x = 0$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Hãy nêu tính chất biến thiên của các hàm số sau:*

a. $y = 8x^2$.

b. $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Giải

a. Xét hàm số $y = 8x^2$ có $a = 8 > 0$, do đó:
   - Hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_-$.
   - Hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_+$.

b. Xét hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ có $a = -\frac{1}{2} < 0$, do đó:
   - Hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_-$.
   - Hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_+$.

Ví dụ 2: *Cho hàm số:* $y = \frac{1}{2}x^2$.

a. *Hãy lập bảng tính các giá trị* $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$ *và rút ra nhận xét.*

b. *Tìm* x, *biết* $f(x) = 1$, $f(x) = 2 - \sqrt{3}$.

Giải

a. Ta lập bảng sau:

x	−4	−2	0	2	4
$y = \frac{1}{2}x^2$	8	2	0	2	8

Từ kết quả trên, nhận thấy rằng:

$f(-4) = f(4)$ và $f(-2) = f(2)$, tức là $f(-x) = f(x)$.

b. Ta lần lượt xét:

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

$$f(x) = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2(2 - \sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} - 1)^2 \Leftrightarrow x = \pm(\sqrt{3} - 1)$$

Ví dụ 3: (Bài 2/tr 31 − Sgk): *Một vật rơi ở độ cao so với mặt đất là* 100m *Quãng đường chuyển động* s (mét) *của vật rơi phụ thuộc vào thời gian* t (giây) *bởi công thức*: $S = 4t^2$.

a. *Sau* 1 *giây, vật này cách mặt đất bao nhiêu mét? Tương tự, sau 2 giây?*

b. *Hỏi sau bao lâu vật này tiếp đất?*

Giải

a. Sau 1 giây, vật rơi đi được quãng đường là: $S = 4 \times 1^2 = 4$ (mét).

Vậy, sau 1 giây, vật cách mặt đất một khoảng là: $d = 100 - 4 = 96$ (mét).

Sau 2 giây, vật rơi đi được quãng đường là: $S = 4 \times 2^2 = 16$ (mét).

Vậy, sau 2 giây, vật cách mặt đất một khoảng là: $d = 100 - 16 = 84$ (mét).

b. Thời gian vật này tiếp đất là: $t = \sqrt{\frac{S}{4}} = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5$ (giây).

Vậy, thời gian từ lúc bắt đầu rơi đến lúc vật này tiếp đất là 5 giây.

Ví dụ 4: *Cho hàm số* $y = (2m - 4)x^2$ với $a = 2m - 4 \neq 0$

Tìm giá trị của m *để*:

a. *Hàm số nghịch biến với* $x > 0$.

b. *Có giá trị* $y = 9$ *khi* $x = 3$.

c. *Hàm số có giá trị nhỏ nhất là* 0.

d. *Hàm số có giá trị lớn nhất là* 0.

Giải

Hàm số đã cho có dạng $y = ax^2$ với $a = 2m - 4 \neq 0$.

a. Hàm số nghịch biến với $x > 0$ khi và chỉ khi:

$a < 0 \Leftrightarrow 2m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Vậy, với $m < 2$ hàm số nghịch biến với $x > 0$.

b. Thay $x = 3$ và $y = 9$ vào hàm số, ta được:

$$9 = (2m - 4).3^2 \Leftrightarrow 2m - 4 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}.$$

Vậy, với $m = \frac{5}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Để hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0 điều kiện là:

$$(2m - 4)x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > 2$$

Vậy, với $m > 2$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0.

d. Để hàm số có giá trị lớn nhất là 0 điều kiện là:

$$(2m - 4)x^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < 2.$$

Vậy, với $m < 2$ hàm số có giá trị lớn nhất là 0.

☞ ***Chú ý***: Trong lời giải câu c) và d), chúng ta đã sử dụng tính chất $x^{2l} \geq 0$.

Ví dụ 5: *Cho hàm số*: $y = f(x) = ax^2$, với $a \neq 0$.

a. *Chứng minh rằng* $f(kx) = k^2 f(x)$.

b. *Tìm* k *để hệ thức trong câu* a) *còn đúng với hàm số*:

$y = g(x) = ax^2 + b$, *với* $b \neq 0$

✍ *Giải*

a. Ta có: $f(kx) = a(kx)^2 = ak^2x = k^2(ax) = k^2f(x)$, đpcm.

b. Ta xét: $g(kx) = a(kx)^2 + b = ak^2x^2 + b$

$k^2g(x) = k^2(ax^2 + b) = ak^2x^2 + bk^2$

Vậy, để có $g(kx) = k^2g(x)$, điều kiện là:

$$ak^2x^2 + b = ak^2x^2 + bk^2 \Leftrightarrow b = bk^2 \overset{b\neq 0}{\Leftrightarrow} k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1.$$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Hãy nêu tính chất biến thiên của các hàm số sau:

a. $y = 3x^2$.

b. $y = -\frac{9}{2}x^2$.

c. $y = (4 - 2\sqrt{3})x^2$.

d. $y = (m^2 + 1)x^2$.

e. $y = (m - 1)x^2$.

Bài 2: Cho hàm số $y = 2x^2$.

a. Hãy lập bảng tính các giá trị $f(-5)$, $f(-3)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(5)$ và rút ra nhận xét.

b. Tìm x, biết $f(x) = 8$, $f(x) = 6 - 4\sqrt{2}$.

Bài 3: Cho hàm số $y = (m^2 - 3m + 2)x^2$.

Tìm giá trị của m để:

a. Hàm số đồng biến với $x > 0$.

b. Có giá trị $y = 8$ khi $x = 2$.

c. Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0.

d. Hàm số có giá trị lớn nhất là 0.

Bài 4: (Bài 3/tr 31 – Sgk): Lực F của gió khi thổi vuông góc vào cánh buồm tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc v của gió, tức là $F = av^2$ (a là hằng số). Biết rằng khi vận tốc gió bằng 2m/s thì lực tác động lên cánh buồm của một con thuyền bằng 120 N (Niu–tơn).

a. Tính hằng số a.

b. Hỏi khi v = 10m/s thì lực F bằng bao nhiêu? Cùng câu hỏi này khi v = 20m/s?

c. Biết rằng cánh buồm chỉ có thể chịu được một áp lực tối đa là 12000N, hỏi con thuyền có thể đi được trong gió bão với vận tốc gió 90km/h hay không?

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. Xét hàm số $y = 3x^2$ có $a = 8 > 0$, do đó:

- Hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_-$.
- Hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_+$.

b. Xét hàm số $y = -\frac{9}{2}x^2$ có $a = -\frac{9}{2} < 0$, do đó:

- Hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_-$.
- Hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_+$.

c. Xét hàm số $y = (4 - 2\sqrt{3})x^2$ có $a = 4 - 2\sqrt{3} > 0$, do đó:

- Hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_-$.
- Hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_+$.

d. Xét hàm số $y = (m^2 + 1)x^2$ có $a = m^2 + 1 > 0$, do đó:

- Hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_-$.
- Hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_+$.

e. Xét hàm số $y = (m - 1)x^2$ có $a = m - 1$, xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì:

- Hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_-$.
- Hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_+$.

Trường hợp 2: Nếu $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì:

- Hàm số đồng biến trong $\mathbf{R}_-$.
- Hàm số nghịch biến trong $\mathbf{R}_+$.

Bài 2:

a. Ta lập bảng sau:

x	– 5	–3	0	3	5
$y = 2x^2$	50	18	0	18	50

Từ kết quả trên, nhận thấy rằng:

f(–5) = f(5) và f(–3) = f(3), tức là f(–x) = f(x).

b. Ta lần lượt xét:

$f(x) = 8 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$

$f(x) = 6 - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 2x^2 = 6 - 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x^2 = 3 - 2\sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} - 1)^2 \Leftrightarrow x = \pm(\sqrt{2} - 1).$

Bài 3: Hàm số đã cho có dạng $y = ax^2$ với $a = m^2 - 3m + 2 \neq 0$.

a. Hàm số đồng biến với $x > 0$ khi và chỉ khi $a > 0$, tức là:

$$m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} m-1>0 \\ m-2>0 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} m-1<0 \\ m-2<0 \end{cases} \right. \Leftrightarrow m < 1 \text{ hoặc } m > 2.$$

Vậy, với $m < 1$ hoặc $m > 2$ hàm số đồng biến với $x > 0$.

b. Thay $x = 2$ và $y = 8$ vào hàm số, ta được:

$8 = (m^2 - 3m + 2).2^2 \Leftrightarrow m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 3$.

Vậy, với $m = 0$ hoặc $m = 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Để hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0 điều kiện là:

$(m^2 - 3m + 2)x^2 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow m < 1$ hoặc $m > 2$.

Vậy, với $m < 1$ hoặc $m > 2$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0.

d. Để hàm số có giá trị lớn nhất là 0 điều kiện là:

$(m^2 - 3m + 2)x^2 \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-2) < 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} m-1>0 \\ m-2<0 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} m-1<0 \\ m-2>0 \end{cases} \right. \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

Vậy, với $1 < m < 2$ hàm số có giá trị lớn nhất là 0.

Bài 4:

a. Khi vận tốc gió bằng 2m/s thì lực tác động lên cánh buồm của một con thuyền bằng 120 N. Do đó, hằng số a là:

$$a = \frac{F}{v^2} = \frac{120}{2^2} = 30.$$

b. Khi vận tốc gió bằng 10m/s thì lực tác động lên cánh buồm của một con thuyền là:

$F = 30.10^2 = 3000$ (N).

Khi vận tốc gió bằng 20m/s thì lực tác động lên cánh buồm của một con thuyền là:

$F = 30.20^2 = 12000$ (N).

c. Đổi: $90\text{km/h} = \frac{90000}{3600} = 25\text{m/s}$.

Khi vận tốc gió bằng 90km/h thì lực tác động lên cánh buồm của một con thuyền là:

$F = 30.25^2 = 18750$ (N).

Vậy, con thuyền không thể đi được trong gió bão với vận tốc 90km/h.

CHỦ ĐỀ 2

ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2$, $a \neq 0$

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = ax^2$, với $a \neq 0$

Đồ thị của hàm số $y = ax^2$, với $a \neq 0$ là một đường *Parabol*:

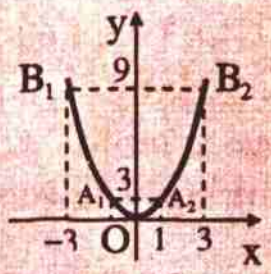
- Có đỉnh là gốc toạ độ O (0; 0).
- Có trục đối xứng Oy.
- Nếu $a > 0$, đồ thị hàm số nằm phía trên trục hoành và nhận điểm O là điểm "thấp nhất".
- Nếu $a < 0$, đồ thị hàm số nằm phía dưới trục hoành và nhận điểm O là điểm "cao nhất".

2. CÁCH VẼ ĐỒ THỊ

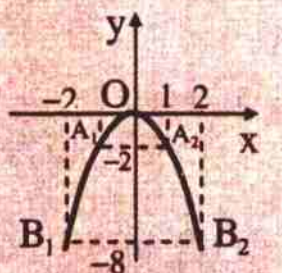
Để vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$, $a \neq 0$ ta đi lấy 5 điểm:

- Điểm O(0; 0).
- Cặp điểm A_1, A_2 có hoành độ đối xứng qua O.
- Cặp điểm B_1, B_2 có hoành độ đối xứng qua O.

Nối các điểm B_1, A_1, O, A_2, B_2 theo đường cong ta nhận được đồ thị của hàm số.



a > 0



a < 0

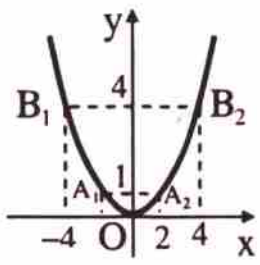
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Cho hàm số* $y = \frac{1}{4}x^2$.

a. *Vẽ đồ thị hàm số.*

b. *Các điểm* A(0; 0), B(2; 1), C($\frac{3}{2}$; $\frac{9}{16}$), D(3; 4) *có thuộc đồ thị của hàm số không* ?

Giải



a. Để vẽ đồ thị hàm số, ta lấy 5 điểm:

- Điểm O(0; 0).
- Cặp điểm $A_1(-2; 1)$, $A_2(2; 1)$.
- Cặp điểm $B_1(-4; 4)$, $B_2(4; 4)$.
- Nối các điểm B_1, A_1, O, A_2, B_2 theo đường cong ta nhận được đồ thị của hàm số.

b. Thay toạ độ các điểm A, B, C, D vào hàm số, ta nhận thấy:

- Các điểm A, B, C thuộc đồ thị hàm số.
- Điểm D không thuộc đồ thị hàm số.

Ví dụ 2: (Bài 6/tr 38 – Sgk): *Cho hàm số* $y = f(x) = x^2$.

a. *Vẽ đồ thị hàm số đó.*

b. *Tính các giá trị* $f(-8)$; $f(-1,3)$; $f(-0,75)$; $f(1,5)$.

c. *Dùng đồ thị để ước lượng các giá trị* $(0,5)^2$; $(-1,5)^2$; $(2,5)^2$.

d. *Dùng đồ thị để ước lượng vị trí các điểm trên trục hoành biểu diễn các số* $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$.

Giải

a. Ta có bảng giá trị tương ứng:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Biểu diễn các cặp giá trị tương ứng trên mặt phẳng toạ độ và nối các điểm đó lại với nhau, ta được đường cong gọi là parabol – *Học sinh tự vẽ hình.*

b. Ta có:

$f(-8) = (-8)^2 = 64$; $f(-1,3) = (-1,3)^2 = 1,69$;

$f(-0,75) = (-0,75)^2 = 0,5625$; $f(1,5) = (1,5)^2 = 2,25$.

c. Để ước lượng giá trị $(0,5)^2$, ta thực hiện theo các bước sau:

- Từ điểm (0,5 ; 0) trên trục hoành, kẻ đường thẳng song song với trục tung cắt (P) tại A.
- Qua A, kẻ đường thẳng song song với Ox và cắt Oy tại điểm có tung độ nằm giữa 0,2 và 0,3.

Vậy, ước lượng giá trị $(0,5)^2$ là khoảng 0,25.

Tương tự, ước lượng giá trị $(-1,5)^2$ là 2,2;

ước lượng giá trị $(2,5)^2$ là 6,2.

d. Để ước lượng vị trí các điểm trên trục hoành biểu diễn số $\sqrt{3}$, ta thực hiện theo các bước sau:

- Qua điểm (0 ; 3) kẻ đường thẳng song song với Ox, cắt (P) tại D.
- Qua D, kẻ đường thẳng song song với Oy, cắt Ox tại điểm D'.
- Điểm D' trên đồ thị biểu diễn số $\sqrt{3}$.

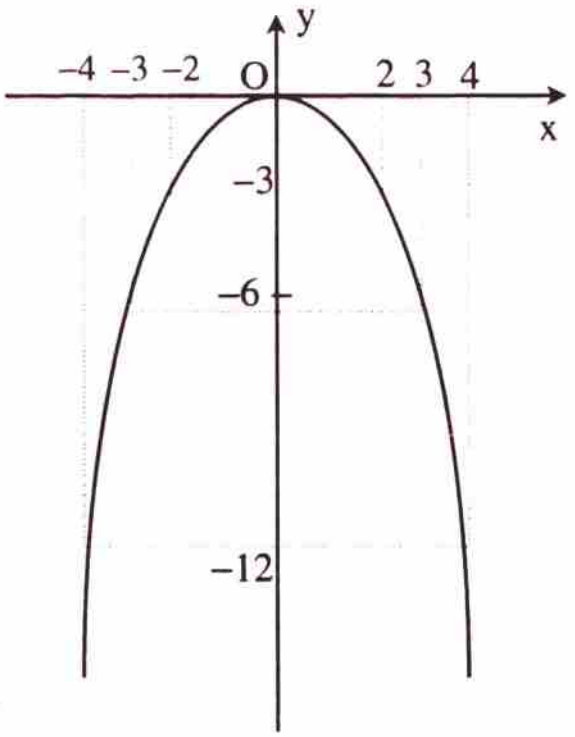
Để ước lượng vị trí các điểm trên trục hoành biểu diễn số $\sqrt{7}$, ta thực hiện theo các bước sau:

- Qua điểm (0 ; 7) kẻ đường thẳng song song với Ox, cắt (P) tại E.
- Qua D, kẻ đường thẳng song song với Oy, cắt Ox tại điểm E'.
- Điểm E' trên đồ thị biểu diễn số $\sqrt{7}$.

Ví dụ 3: (Bài 10/tr 39 – Sgk): *Cho hàm số:*

$$y = -0,75x^2$$

Qua đồ thị hàm số đó, hãy cho biết khi x tăng từ –2 đến 4 thì giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của y là bao nhiêu?



Giải

Đồ th hàm số $y = -0,75x^2$ là một parabol như hình vẽ.

Qua đồ thị hàm số, ta thấy, khi x tăng từ -2 đến 4 thì:

- Giá trị lớn nhất của y là:
  Maxy = 0 khi x bằng 0.
- Giá trị nhỏ nhất của y là:
  Miny = –12 khi x bằng 4.

Ví dụ 4: *Cho hàm số:* $y = (m - 1)x^2$

a. *Xác định* m *để đồ thị hàm số đi qua điểm* A(1; –1). *Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.*

b. *Tìm điểm thuộc parabol nói trên có hoành độ bằng* 5.

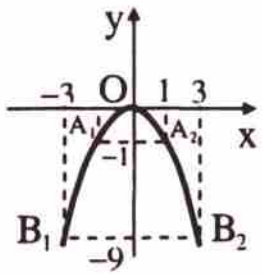
c. *Tìm điểm thuộc parabol nói trên có tung độ bằng* – 4.

d. *Tìm điểm thuộc parabol có tung độ gấp đôi hoành độ.*

Giải

a. Đồ th hàm số đi qua điểm A(1; –1), khi và chỉ khi:

$$- = (m - 1).1^2 \Leftrightarrow m - 1 = -1 \Leftrightarrow m = 0.$$



Với m = 0, hàm số có dạng: (P): $y = -x^2$.

Để vẽ đồ thị hàm số, ta lấy 5 điểm:

- Điểm O(0, 0).
- Cặp điểm $A_1(-1; -1)$, $A_2(1; -1)$.
- Cặp điểm $B_1(-3; -4)$, $B_2(3; -4)$.

Nối các điểm B_1, A_1, O, A_2, B_2 theo đường cong ta nhận được đồ thị của hàm số.

b. Gọi điểm thuộc Parabol (P) có hoành độ bằng – 4 là B (5; b), suy ra:

$$b = -5^2 \Leftrightarrow b = -25.$$

Vậy, điểm cần tìm là B(5; – 25).

c. Gọi điểm thuộc Parabol (P) có tung độ bằng – 4 là C (c; –4) , suy ra:

$$-4 = -c^2 \Leftrightarrow c^2 = 4 \Leftrightarrow c = \pm 2.$$

Vậy, ta nhận được hai điểm cần tìm là $C_1(2; -4)$ và $C_2(-2, -4)$.

d. Gọi điểm thuộc Parabol (P) có tung độ gấp đôi hoành độ là M(m ; 2m), suy ra:

$$2m = -m^2 \Leftrightarrow m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow m(m+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -2 \end{array}\right.$$

Khi đó:

- Với m = 0, ta được gốc O(0; 0).
- Với m = –2, ta được điểm M(–2; –4).

Vậy, có hai điểm là gốc O(0; 0) và điểm M(–2; –4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 5: *Cho Parabol* (P) *có phương trình* $y = 2x^2$.

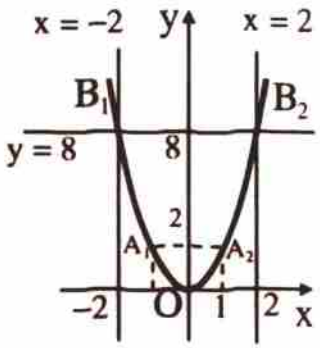
a. *Trên cùng một hệ toạ độ vẽ Parabol* (P) *và các đường thẳng* $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 8$.

b. *Parabol* (P) *cắt mỗi đường thẳng trên tại mấy điểm ? Xác định toạ độ các giao điểm đó.*

c. *Đường thẳng* $x = m$ *có thể không cắt Parabol* (P) *hoặc cắt Parabol* (P) *tại hai điểm phân biệt không ? Vì sao ?*

d. *Biện luận theo* n *vị trí tương đối của đường thẳng* $y = n$ *với Parabol* (P).

Giải



a. Ta lần lượt thực hiện:

- Vẽ Parabol (P) bằng cách lấy 5 điểm:

  O(0; 0), $A_1(-1; 2)$ và $A_2(1; 2)$,

  $B_1(-2; 8)$ và $B_2(2; 8)$.

- Đường thẳng x = –2 song song với Oy và cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng –2.
- Đường thẳng x = 0 chính là trục Oy.
- Đường thẳng x = 2 song song với Oy và cắt Ox tại điểm có hoành độ bằng 2.
- Đường thẳng y = 8 song song với Ox và cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 8.

b. Ta thấy ngay:

- Parabol (P) cắt đường thẳng x = –2 tại điểm $B_1(-2; 8)$.
- Parabol (P) cắt đường thẳng x = 0 tại gốc O(0; 0).
- Parabol (P) cắt đường thẳng x = 2 tại điểm $B_1(2; 8)$.
- Parabol (P) cắt đường thẳng y = 8 tại hai điểm $B_1(-2; 8)$ và $B_2(2; 8)$.

c. Nhận xét rằng:

- Parabol (P) không thể không cắt đường thẳng x = m bởi hàm số $y = 2x^2$ có tập xác định là **R**.
- Parabol (P) không thể cắt đường thẳng x = m tại hai điểm phân biệt bởi $y = 2x^2$ là một hàm số (với mỗi x chỉ có duy nhất 1 giá trị của y).

d. Dựa vào đồ thị, ta có:

- Nếu n < 0 thì đường thẳng y = n không cắt Parabol (P).
- Nếu n = 0 thì đường thẳng y = n và Parabol (P) có điểm chung O(0, 0).
- Nếu n > 0 thì đường thẳng y = n cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

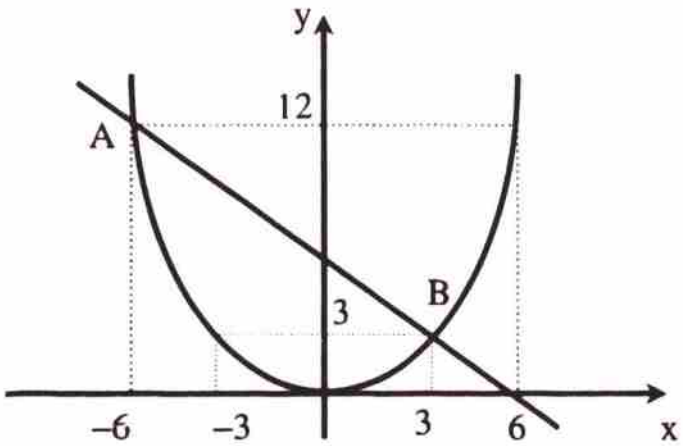
Ví dụ 6: (Bài 9/tr 39 – Sgk): *Cho hai hàm số* $y = \frac{1}{3}x^2$ và $y = -x + 6$

a. *Vẽ đồ thị của các hàm số này trên cùng một mặt phẳng toạ độ.*

b. *Tìm toạ độ các giao điểm của hai đồ thị đó.*

Giải

a. Đồ thị các hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$ và $y = -x + 6$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ.



b. Hai đồ thị giao nhau tại hai điểm A(–6 ; 12) và B(3 ; 3).

Thử lại:

- Điểm A(–6 ; 12), ta có:

$$12 = \frac{1}{3}(-6)^2 = -(-6) + 6 \text{ (đúng).}$$

- Điểm B(3 ; 3), ta có: $3 = \frac{1}{3}.3^2 = -3 + 6$ (đúng).

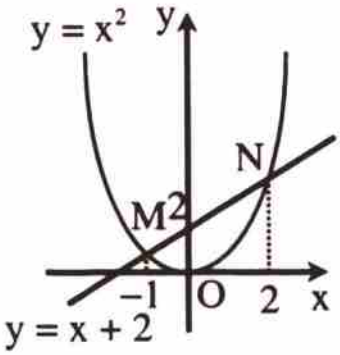
Ví dụ 7: (Bài 55/tr 63 – Sgk): *Cho phương trình*:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

a. *Giải phương trình.*

b. *Vẽ hai đồ thị* $y = x^2$ *và* $y = x + 2$ *trên cùng một trục toạ độ.*

c. *Chứng tỏ rằng hai nghiệm tìm được trong câu a? là hoành độ giao điểm của hai đồ thị.*



✍ *Giải*

a. Ta có: $1 - (-1) - 2 = 0$

Do đó, phương trình có nghiệm $x = -1$ và $x = 2$.

b. Vẽ hai đồ thị $y = x^2$ và $y = x + 2$ trên cùng một trục toạ độ.

c. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình:

$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$.

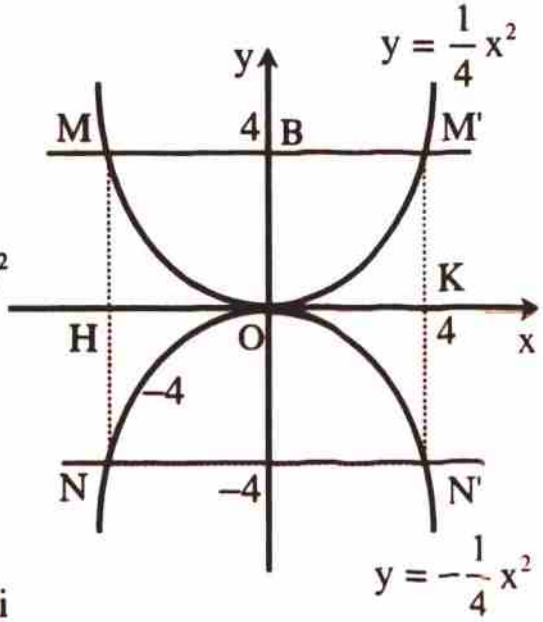
Vậy, hoành độ giao điểm của hai đồ thị là -1 và 2 chính là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 8: (Bài 54/tr 63 – Sgk): *Vẽ đồ thị của hai hàm số*: $y = \frac{1}{4}x^2$ và $y = -\frac{1}{4}x^2$ *trên cùng một hệ trục toạ độ.*

a. *Qua điểm* B(0 ; 4) *kẻ đường thẳng song song với trục* Ox. *Nó cắt đồ thị của hàm số* $y = \frac{1}{4}x^2$ *tại hai điểm* M *và* M'. *Tìm hoành độ của* M *và* M'.

b. *Tìm trên đồ thị của hàm số* $y = -\frac{1}{4}x^2$ *điểm* N *có cùng hoành độ với* M, *điểm* N' *có cùng hoành độ với* M'. *Đường thẳng* NN' *có song song với* Ox *không? Vì sao? Tìm tung độ của* N *và* N' *bằng hai cách*:

- *Ước lượng trên hình vẽ.*
- *Tính toán theo công thức.*



✍ *Giải*

Đồ thị hai hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ và $y = -\frac{1}{4}x^2$ đối xứng nhau qua trục hoành.

a. Qua điểm B(0 ; 4) kẻ đường thẳng song song với trục Ox cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ tại hai điểm M và M'.

Từ M kẻ MH song song với Oy cắt Ox tại H có toạ độ (–4 ; 0).

Từ M' kẻ MK song song với Oy cắt Ox tại K có toạ độ (4 ; 0).

Vậy, toạ độ M(–4 ; 4) và M' (4 ; 4).

b. Trên đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$ điểm N có cùng hoành độ với M, điểm N' có cùng hoành độ với M'

Mà đồ thị của hai hàm số trên đối xứng với nhau qua Ox, nên N và N' có cùng tung độ.

Do đó, đường thẳng NN' song song với Ox.

Thật vậy:

- Tung độ của N và N' ước lượng trên hình vẽ là bằng –4.
- Kiểm tra bằng tính toán: $y = -\frac{1}{4}(-4)^2 = -4$.

Ví dụ 9: (Bài 5/tr 37 – Sgk): *Cho ba hàm số:* $y = \frac{1}{2}x^2$; $y = x^2$; $y = 2x^2$.

a. *Vẽ đồ thị của ba hàm số trên cùng một mặt phẳng toạ độ.*

b. *Tìm ba điểm* A_1, B_1, C_1 *có cùng hoành độ* $x = -1,5$ *theo thứ tự nằm trên ba đồ thị. Xác định tung độ tương ứng của chúng.*

c. *Tìm ba điểm* A_2, B_2, C_2 *có cùng hoành độ* $x = 1,5$ *theo thứ tự nằm trên ba đồ thị. Kiểm tra tính đối xứng của* A_1 *và* A_2, B_1 *và* B_2, C_1 *và* C_2.

d. *Với mỗi hàm số trên, hãy tìm giá trị của* x *để hàm số đó có giá trị nhỏ nhất.*

Giải

a. Đồ thị của ba hàm số trên cùng một mặt phẳng toạ độ – *Học sinh tự vẽ.*

b. Giả sử $A_1 \in (d_1)$: $y = \frac{1}{2}x^2$; $B_1 \in (d_2)$: $y = x^2$; $C_1 \in (d_3)$: $y = 2x^2$ cùng có hoành độ là $x = -1,5$.

Do đó:

- Điểm A_1 có tung độ là: $y = \frac{1}{2}(-1,5)^2 = 1,125$.
- Điểm B_1 có tung độ là: $y = (-1,5)^2 = 2,25$.
- Điểm C_1 có tung độ là: $y = 2(-1,5)^2 = 4,5$.

Vậy A(–1,5 ; 1,125); B(–1,5 ; 2,25); C(–1,5 ; 4,5).

c. Giả sử $A_2 \in (d_1)$: $y = \frac{1}{2}x^2$; $B_2 \in (d_2)$: $y = x^2$; $C_2 \in (d_3)$: $y = 2x^2$ cùng có hoành độ là $x = 1,5$.

Do đó:

- Điểm A_2 có tung độ là: $y = \frac{1}{2}(1,5)^2 = 1,125$.
- Điểm B_2 có tung độ là: $y = (1,5)^2 = 2,25$.

- Điểm C_2 có tung độ là: $y = 2(1,5)^2 = 4,5$.

Vậy A(1,5 ; 1,125); B(1,5 ; 2,25); C(1,5 ; 4,5).

Dễ dàng nhận thấy,

- A_1 và A_2 đối xứng nhau qua trục tung.
- B_1 và B_2 đối xứng nhau qua trục tung.
- C_1 và C_2 đối xứng nhau qua trục tung.

d. Cả ba hàm số trên đều có giá trị nhỏ nhất $y = 0$ khi $x = 0$.

Ví dụ 10: *Cho các hàm số:*

$$y = f(x) = x^2,\ y = g(x) = x^2 - 6,\ y = h(x) = x^2 + 5.$$

a. *Tìm tập xác định của ba hàm số trên.*

b. *Với* $x = -2; 0; 1; 2; 3$ *hãy tính các giá trị tương ứng* f(x), g(x), h(x).

c. *Có nhận xét gì về giá trị của các hàm số* f(x), g(x), h(x) *ứng với cùng một giá trị của biến số* x, *từ đó đưa ra kết luận về đồ thị các hàm số* $y = g(x)$ *và* $y = h(x)$.

d. *Với giá trị nào của* x *thì các hàm số nhận giá trị nhỏ nhất ?*

Giải

a. Ba hàm số trên đều có tập xác định là **R**.

b. Ta lập bảng:

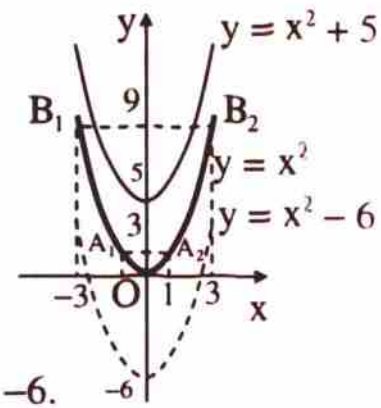
x	–2	0	1	2	3
f(x)	4	0	1	4	9
g(x)	–2	–6	–5	–2	3
h(x)	9	5	6	9	14

c. Từ bảng, ta nhận thấy với bất kì hoành độ nào thì

- Tung độ tương ứng của điểm trên đồ thị hàm số $y = g(x)$ cũng nhỏ hơn tung độ tương ứng của điểm trên đồ thị hàm số $y = f(x)$ là 6 đơn vị.
- Tung độ tương ứng của điểm trên đồ thị hàm số $y = h(x)$ cũng lớn hơn tung độ tương ứng của điểm trên đồ thị hàm số $y = f(x)$ là 5 đơn vị.

Vậy, ta thấy rằng nếu đã có được đồ thị hàm số $y = x^2$ thì:

- Bằng phép tịnh tiến đồ thị này theo trục Oy xuống dưới 6 đơn vị, ta nhận được đồ thị hàm số $y = x^2 - 6$.
- Bằng phép tịnh tiến đồ thị này theo trục Oy lên trên 5 đơn vị, ta nhận được đồ thị hàm số $y = x^2 + 5$.



d. Với $x = 0$ thì các hàm số nhận giá trị nhỏ nhất và

- Hàm số $y = f(x) = x^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng 0.
- Hàm số $y = g(x) = x^2 - 6$ có giá trị nhỏ nhất bằng –6.

- Hàm số $y = h(x) = x^2 + 5$ có giá trị nhỏ nhất bằng 5.

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, để vẽ được đồ thị hàm số $y = ax^2 + b$, ta thực hiện:

- Vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$.
- Tịnh tiến đồ thị này theo trục Oy b đơn vị (lên trên nếu $b > 0$, xuống dưới nếu $b < 0$) ta nhận được đồ thị hàm số $y = ax^2 + b$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hàm số $y = f(x) = -2x^2$.

a. Tính $f(1)$, $f(\frac{1}{3})$.

b. Vẽ đồ thị hàm số.

c. Tìm tập hợp điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ bằng 4.

d. Chứng minh rằng hàm số có giá trị nhỏ nhất là 0.

Bài 2: Hàm cho các hàm số $y = \frac{2}{3}x^2$.

a. Vẽ đồ thị hàm số.

b. Các điểm A(0 ; 0), B (3 ; 6), C (1 ; $\frac{3}{2}$), D(3 ; 1) có thuộc đồ thị của hàm số không?

Bài 3: Cho hàm số: $y = -125x^2$.

a. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số.

b. Tìm giá trị của m và n để các điểm A(1 ; m) và B(n ; 125) thuộc đồ thị hàm số trên.

Bài 4: Cho hàm số: $y = (m + 1)x^2$.

a. Xác định m để đồ thị hàm số đi qua điểm A (1 ; 2).

b. Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.

c. Tìm điểm thuộc parabol nói trên có hoành độ bằng 2.

d. Tìm điểm thuộc parabol nói trên có tung độ bằng – 8.

e. Tìm điểm thuộc parabol có tung độ gấp ba hoành độ.

Bài 5: Cho hàm số:

$$y = (2m - 1)x^2.$$

a. Xác định m để điểm A (– 1 ; 2) thuộc đồ thị hàm số.

b. Vẽ đồ thị hàm số vừa tìm được.

c. Tìm điểm thuộc parabol nói trên có hoành độ bằng 5.

d. Tìm điểm thuộc parabol nói trên có tung độ bằng – 7.

CHỦ ĐỀ 3

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN SỐ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Phương trình bậc hai một ẩn số là phương trình có dạng:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ với } a \neq 0$$

trong đó x là ẩn số và a, b, c là các hệ số đã cho.

Trường hợp đặc biệt:

- Nếu $b = 0$, ta có: $ax^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$. gọi là phương trình bậc hai khuyết b.
- Nếu $c = 0$, ta có: $ax^2 + bx = 0$ $(a \neq 0)$. gọi là phương trình bậc hai khuyết c.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: (Bài 11/tr 42 – Sgk): *Viết lại các phương trình sau dưới dạng* $ax^2 + bx + c$, *rồi xác định các hệ số* a, b, c *của chúng*:

a. $5x^2 + 2x = 4 - x$.

b. $\frac{3}{5}x^2 + 2x - 7 = 3x + \frac{1}{2}$.

c. $2x^2 + x - \sqrt{3} = \sqrt{3}x + 1$.

d. $2x^2 + m^2 = 2(m - 1)x$, m là hằng số.

Giải

a. Ta có: $5x^2 + 2x = 4 - x \Leftrightarrow 5x^2 + 3x - 4 = 0$.

Các hệ số: $a = 5$; $b = 3$; $c = -4$.

b. Ta có: $\frac{3}{5}x^2 + 2x - 7 = 3x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{5}x^2 - x - \frac{15}{2} = 0$.

Các hệ số: $a = \frac{3}{5}$; $b = -1$; $c = -\frac{15}{2}$.

c. Ta có: $2x^2 + x - \sqrt{3} = \sqrt{3}x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} - 1 = 0$

Các hệ số: $a = 2$; $b = 1 - \sqrt{3}$; $c = -\sqrt{3} - 1$.

d. Ta có: $2x^2 + m^2 = 2(m - 1)x \Leftrightarrow 2x^2 - 2(m - 1)x + m^2$.

Các hệ số: $a = 2$; $b = -2(m - 1)$; $c = m^2$.

Ví dụ 2: (Bài 12. c, 12. a/tr 42 – Sgk): *Giải các phương trình*:

a. $0,4x^2 + 1 = 0$. b. $x^2 - 8 = 0$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi phương trình về dạng: $x^2 = -\frac{5}{2} < 0$, nên phương trình vô nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng: $x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{2}$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, với phương trình khuyết b dạng: $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$.

- Nếu $-\frac{c}{a} \geq 0$ thì phương trình có nghiệm $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.
- Nếu $-\frac{c}{a} < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3: (Bài 12. d, 12. e/tr 42 – Sgk): *Giải các phương trình*:

a. $2x^2 + \sqrt{2}\,x = 0$. b. $-0{,}4x^2 + 1{,}2x = 0$.

✍ *Giải*

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$x(2x + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x + \sqrt{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 0$ và $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$-0{,}4x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 0$ và $x = 3$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, với phương trình khuyết c dạng:

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ ax + b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -b/a \end{array}\right.$$

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x = 0$ và $x = -\frac{b}{a}$.

Ví dụ 4: (Bài 13/tr 43 – Sgk): *Giải các phương trình*:

a. $x^2 + 8x = -2$. b. $x^2 + 2x = \frac{1}{3}$.

Hãy cộng vào hai vế của mỗi phương trình cùng một số thích hợp để được một phương trình mà vế trái thành một bình phương.

Giải

a. Ta có:

$$x^2 + 8x = -2 \Leftrightarrow x^2 + 2.4x + 4^2 = -2 + 4^2 \Leftrightarrow (x + 4)^2 = 14$$
$$\Leftrightarrow x + 4 = \pm\sqrt{14} \Leftrightarrow x = -4 \pm \sqrt{14}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = -4 \pm \sqrt{14}$.

b. Ta có:

$$x^2 + 2x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = \frac{1}{3} + 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = \frac{4}{3}$$
$$\Leftrightarrow x + 1 = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$.

Ví dụ 5: *Giải các phương trình*:

a. $x^2 - 2x - 3 = 0$. b. $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

Giải

a. Biến đổi phương trình về dạng tích theo các cách:

Cách 1: (*Sử dụng phép tách theo a*): Ta có:

$$x^2 - 2x - 3 = 3x^2 - 2x^2 - 2x - 3 = (3x^2 - 3) - (2x^2 + 2x)$$
$$= 3(x^2 - 1) - 2x(x + 1) = 3(x - 1)(x + 1) - 2x(x + 1)$$
$$= (x + 1)[3(x - 1) - 2x] = (x + 1)(x - 3).$$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 3$ và $x = -1$.

Cách 2: (*Sử dụng phép tách theo b*): Ta có:

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 + x - 3x - 3 = (x^2 + x) - (3x + 3)$$
$$= x(x + 1) - 3(x + 1) = (x + 1)(x - 3).$$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 3$ và $x = -1$.

Cách 3: (*Sử dụng phép tách theo c*): Ta có:

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x - 2 - 1 = (x^2 - 1) - (2x + 2)$$
$$= (x - 1)(x + 1) - 2(x + 1) = (x + 1)(x - 1 - 2)$$
$$= (x + 1)(x - 3).$$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 3$ và $x = -1$.

Cách 4: (*Sử dụng phép tách tạo hằng đẳng thức*): Ta có:

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2.x.1 + 1 - 4 = (x-1)^2 - 4$$
$$= (x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = (x - 3)(x + 1).$$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 3$ và $x = -1$.

b. Biến đổi vế trái của phương trình về dạng tích theo các cách:

Cách 1 (*Sử dụng phép tách theo a*): Ta có:

$$2x^2 - 5x + 3 = 5x^2 - 3x^2 - 5x + 3 = (5x^2 - 5x) - 3(x^2 - 1)$$
$$= 5x(x - 1) - 3(x - 1)(x + 1) = (x - 1)(5x - 3x - 3)$$
$$= (x - 1)(2x - 3).$$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x - 1)(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 2x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = \dfrac{3}{2}$.

Cách 2 (*Sử dụng phép tách theo b*): Ta có:

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = (2x^2 - 2x) - (3x - 3)$$
$$= 2x(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(2x - 3).$$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x - 1)(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 2x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = \dfrac{3}{2}$.

Cách 3 (*Sử dụng phép tách theo c*): Ta có:

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 5x + 5 - 2 = (2x^2 - 2) - (5x - 5)$$
$$= 2(x - 1)(x + 1) - 5(x - 1) = (x - 1)(2x + 2 - 5)$$
$$= (x - 1)(2x - 3).$$

Khi đó, phương trình có dạng: $(x - 1)(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 2x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = \dfrac{3}{2}$.

Cách 4: (*Sử dụng phép tách tạo hằng đẳng thức*):

Ta có:

$$2x^2-5x+3=0\Leftrightarrow x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow x^2-2.\frac{5}{4}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2-\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{1}{16}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{5}{4}=\frac{1}{4}\\ x-\frac{5}{4}=-\frac{1}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3}{2}.\\ x=1\end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=1$ và $x=\frac{3}{2}$.

Cách 5: (*Sử dụng phép tách tạo hằng đẳng thức*): Ta có:

$$2x^2-5x+3=0\Leftrightarrow 16x^2-40x+24=0\Leftrightarrow (4x)^2-2.4x.5+25-1=0$$

$$\Leftrightarrow(4x-5)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x-5=1\\ 4x-5=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3}{2}.\\ x=1\end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=1$ và $x=\frac{3}{2}$.

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, với phương trình không khuyết: $ax^2+bx+c=0$ ta lựa chọn một trong hai phương pháp:

Phương pháp 1. Biến đổi thành phương trình tích: $a(x+m)(x+n)=0$.

Phương pháp 2. Biến đổi thành phương trình dạng: $a(x+m)^2=n$.

Và phương pháp 2 luôn được ưu tiên, bởi phương pháp 1 chỉ có thể được thực hiện trong trường hợp phương trình có 2 nghiệm (mà như chúng ta đã biết một phương trình bậc hai có thể vô nghiệm, có 1 nghiệm hoặc 2 nghiệm).

Trong các cách 4 và cách 5 của câu b) đã chỉ ra cho chúng ta hai cách biến đổi phương trình về dạng $A^2=m$, trong trường hợp hệ số a không phải là số chính phương.

Ví dụ 6: *Cho phương trình*: $2x^2-mx-m+1=0$.

Tìm m *để phương trình có một nghiệm là* 2 *và giải phương trình đó.*

✍ *Giải*

Phương trình nhận $x=2$ làm nghiệm khi:

$2.2^2-m.2-m+1=0\Leftrightarrow 3m=9\Leftrightarrow m=3$.

Với $m=3$, phương trình có dạng:

$$2x^2-3x-2=0\Leftrightarrow(x-2)(2x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=0\\ 2x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 2$ và $x = -\frac{1}{2}$.

☞ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên, sở dĩ biến đổi được ngay:

$$2x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(2x + 1)$$

do chúng ta tận dụng kết quả trước đó là "*Phương trình có nghiệm $x = 2$*", suy ra đa thức $2x^2 - 3x - 2$ chia hết cho $x - 2$.

Ví dụ 7: *Cho phương trình*: $x^2 - (m + 1)x + m = 0$.

a. *Xác định các hệ số* a, b, c *của phương trình.*

b. *Giải phương trình với* $m = -1$.

c. *Giải phương trình với* $m = 0$.

d. *Giải phương trình với* $m = 3$.

✍ *Giải*

a. Ta có ngay: $a = 1$, $b = -(m + 1)$, $c = m$.

b. Với $m = -1$, phương trình có dạng:

$x^2 - (-1 + 1)x + (-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vậy với $m = -1$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \pm 1$.

c. Với $m = 0$, phương trình có dạng:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Vậy với $m = 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 0$ và $x = 1$.

d. Với $m = 3$, phương trình có dạng: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 4 - 3$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 1 \\ x - 2 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Vậy với $m = 3$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 3$ và $x = 1$.

☞ ***Nhận xét***:

1. Việc nêu ra ví dụ trên giúp các em học sinh ôn tập được lại các kiến thức cơ bản trong chủ đề này, bao gồm:
   - Xác định các hệ số của phương trình bậc hai trong câu a).
   - Giải phương trình bậc hai khuyết b trong câu b).
   - Giải phương trình bậc hai khuyết c trong câu c).
   - Giải phương trình bậc hai đầy đủ trong câu d) bằng việc biến đổi về dạng bình phương.
2. Qua lời giải của các câu b), c), d) chúng ta thấy ngay rằng trong ba trường hợp này phương trình đều có nghiệm $x = 1$, nhận định này sẽ giúp chúng ta có thể trình bày lời giải gọn hơn, cụ thể:

$x^2 - (m + 1)x + m = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - mx + m = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) - m(x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - m = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = m \end{array}\right.$$

Khi đó:

- Với $m = -1$, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = -1$.
- Với $m = 0$, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = 0$.
- Với $m = 3$, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = 3$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Viết lại các phương trình sau dưới dạng $ax^2 + bx + c$, rồi xác định các hệ số a, b, c của chúng:

a. $x^2 - 3x - 2 = x + 2$.

b. $4x^2 - 8x = 3x^2 - 5$.

c. $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x + 3 - x = 0$.

d. $mx^2 + 2mx - 3m = x^2 - mx$.

Bài 2: Cho phương trình: $x^2 - (4m + 1)x + 4m = 0$.

a. Xác định các hệ số a, b, c của phương trình.

b. Giải phương trình với $m = -\frac{1}{4}$, $m = 0$, $m = 1$.

c. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 sao cho $x_1 + x_2 = 9$.

d. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 sao cho $x_1 = x_2^2$.

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a. $4x^2 - 1 = 0$.

b. $(m^2 + 2)x^2 + 1 = 0$.

c. $\sqrt{3}x^2 + 6x = 0$.

d. $m^2x^2 - 2x = x - x^2$.

Bài 4: Giải các phương trình sau bằng 5 cách:

a. $x^2 + 2x - 3 = 0$.

b. $4x^2 + 3x - 7 = 0$.

c. $-3x^2 + 2x + 1 = 0$.

d. $x^2 + 5x + 4 = 0$.

e. $2x^2 + 5x + 3 = 0$.

f. $-7x^2 + 5x + 12 = 0$.

Bài 5: Giải các phương trình sau:

a. $x^2 - 2x - 4 = 0$.

b. $2x^2 + 4x + 1 = 0$.

c. $x^2 + x - 3 = 0$.

d. $3x^2 - 5x + 1 = 0$.

Bài 6: Cho phương trình: $mx^2 - (2m + 1)x + 4 = 0$.

Tìm m để phương trình có một nghiệm là $\frac{4}{3}$ và giải phương trình đó.

Bài 7: Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$.

a. Chứng minh rằng nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{c}{a}$.

b. Chứng minh rằng nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x = -1$ và $x = -\frac{c}{a}$.

Bài 8: Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$.

Bằng việc biến đổi phương trình về dạng $A^2 = m$ hãy chứng minh rằng:

a. Nếu $b^2 - 4ac > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Nếu $b^2 - 4ac = 0$ thì phương trình có nghiệm $x = -\frac{b}{2a}$.

c. Nếu $b^2 - 4ac < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1:

a. Chuyển phương trình về dạng: $x^2 - 4x - 4 = 0$

suy ra $a = 1, b = -4, c = -4$.

b. Chuyển phương trình về dạng: $x^2 - 8x + 5 = 0$

suy ra $a = 1, b = -8, c = 5$.

c. Chuyển phương trình về dạng: $\sqrt{3}\,x^2 + (\sqrt{2} - 1)x + 3 = 0$

suy ra $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2} - 1, c = 3$.

d. Chuyển phương trình về dạng: $(m - 1)x^2 + 3mx - 3m = 0$

suy ra $a = m - 1, b = 3m, c = -3m$.

Bài 2:

a. Ta có ngay $a = 1, b = -4m - 1, c = 4m$.

b. Biến đổi phương trình về dạng tích bằng cách:

$$x^2 - x - 4mx + 4m = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) - 4m(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 4m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - 4m = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4m \end{array}\right.$$

Khi đó:

- Với $m = -\dfrac{1}{4}$, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = -1$.
- Với $m = 0$, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = 0$.
- Với $m = 1$, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = 4$.

c. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 sao cho $x_1 + x_2 = 9$, điều kiện là:

$$\left\{\begin{array}{l} 4m \neq 1 \\ 1 + 4m = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m \neq \dfrac{1}{4} \\ 4m = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m \neq \dfrac{1}{4} \\ m = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy, với $m = 2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

d. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 sao cho $x_1 = x_2^2$, điều kiện là:

$$\left\{\begin{array}{l} 4m \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} 4m = 1^2 \\ 1 = (4m)^2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m \neq 1/4 \\ \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{4} \\ m = \pm 1/4 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}.$$

Vậy, với $m = -\dfrac{1}{4}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 3:

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$4x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \pm\dfrac{1}{2}$.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$(m^2 + 2)x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{m^2+1} < 0, \text{ vô nghiệm.}$$

c. Biến đổi phương trình về dạng:

$$x(\sqrt{3}\,x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ \sqrt{3}x + 6 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = -2\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 0$ và $x = -2\sqrt{3}$.

d. Biến đổi phương trình về dạng:

$$(m^2 + 1)x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x[(m^2 + 1)x - 3] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ (m^2 + 1)x - 3 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = \dfrac{3}{m^2+1} \end{bmatrix}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 0$ và $x = \dfrac{3}{m^2+1}$.

Bài 4: a. $x = 1$ và $x = -3$. b. $x = 1$ và $x = -\frac{7}{4}$. c. $x = 1$ và $x = -\frac{1}{3}$.

d. $x = -1$ và $x = -4$. e. $x = -1$ và $x = -\frac{3}{2}$. f. $x = -1$ và $x = -\frac{12}{7}$.

Bài 5:

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^2 - 2x + 1 = 1 + 4 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - 1 = \sqrt{5} \\ x - 1 = -\sqrt{5} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 + \sqrt{5} \\ x = 1 - \sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 1 \pm \sqrt{5}$.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$4x^2 + 8x + 4 = 4 - 2 \Leftrightarrow (2x + 2)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x + 2 = \sqrt{2} \\ 2x + 2 = -\sqrt{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \dfrac{-2 + \sqrt{2}}{2} \\ x = \dfrac{-2 - \sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

c. Biến đổi phương trình về dạng:

$$4x^2 + 4x + 1 = 1 + 12 \Leftrightarrow (2x + 1)^2 = 13 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x + 1 = \sqrt{13} \\ 2x + 1 = -\sqrt{13} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \dfrac{-1 - \sqrt{13}}{2} \end{bmatrix}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

d. Biến đổi phương trình về dạng:

$36x^2 + 60x + 25 = 25 - 12 \Leftrightarrow (6x - 5)^2 = 13$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x - 5 = \sqrt{13} \\ 6x - 5 = -\sqrt{13} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5 + \sqrt{13}}{6} \\ x = \dfrac{5 - \sqrt{13}}{6} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$.

Bài 6: Phương trình nhận $x = \dfrac{4}{3}$ làm nghiệm khi:

$$m.\left(\frac{4}{3}\right)^2 - (2m + 1).\frac{4}{3} + 4 = 0 \Leftrightarrow 16m - 12(2m + 1) + 36 = 0$$

$\Leftrightarrow 8m = 24 \Leftrightarrow m = 3.$

Với $m = 3$, phương trình có dạng:

$$3x^2 - 7x + 4 = 0 \Leftrightarrow (3x - 4)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 4 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{4}{3} \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \dfrac{4}{3}$ và $x = 1$.

Bài 7:

a. Với giả thiết:

$a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - b.$

Khi đó, phương trình có dạng:

$ax^2 + bx - a - b = 0 \Leftrightarrow a(x^2 - 1) + b(x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(ax + a + b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ ax + a + b = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-a - b}{a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{c}{a} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 1$ và $x = \dfrac{c}{a}$.

b. Làm tương tự như câu a).

Bài 8: *Hướng dẫn*: Biến đổi phương trình về dạng: $\left(x - \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

CHỦ ĐỀ 4

CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. CÔNG THỨC NGHIỆM

Phương trình: $ax^2 + bc + c = 0$, với $a \neq 0$.

ta có $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.
2. Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.
3. Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ và } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. CÔNG THỨC NGHIỆM THU GỌN

Phương trình: $ax^2 + bc + c = 0$, với $a \neq 0$ và $b = 2b'$.

ta có $\Delta' = b'^2 - ac$.

1. Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.
2. Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a}$.
3. Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a} \text{ và } x_2 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp

Ta có thể sử dụng một trong bốn phương pháp sau:

Phương pháp 1. Biến đổi thành phương trình dạng:

$$a(x + m)^2 = n \ (a \neq 0).$$

Phương pháp 2. Biến đổi thành phương trình tích:

$$a(x + m)(x + n) = 0.$$

Phương pháp 3. Dùng công thức nghiệm của phương trình bậc hai.

Ta xét các trường hợp:

- Nếu $\Delta > 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ và } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Nếu $\Delta = 0$, phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

- Nếu $\Delta < 0$, phương trình vô nghiệm.

Lưu ý: Nếu có $b = 2b'$ ta sử dụng tới $\Delta' = b'^2 - ac$.

- Nếu $\Delta' > 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a} \text{ và } x_2 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}.$$

- Nếu $\Delta' = 0$, phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}.$$

- Nếu $\Delta' < 0$, phương trình vô nghiệm.

Phương pháp 4. Trong trường hợp đặc biệt:

- Nếu $a + b + c = 0$, phương trình có nghiệm:

$$x = 1 \text{ và } x = \frac{c}{a}.$$

- Nếu $a - b + c = 0$, phương trình có nghiệm:

$$x = -1 \text{ và } x = -\frac{c}{a}.$$

Ví dụ 1: (Bài 15/tr 45 – Sgk): *Không phải giải phương trình, hãy xác định các hệ số* a, b, c, *tính biệt thức* Δ *và xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau:*

a. $7x^2 - 2x + 3 = 0$.

b. $5x^2 + 2\sqrt{10}x + 2 = 0$.

c. $\frac{1}{2}x^2 + 7x + \frac{2}{3} = 0$.

d. $1{,}7x^2 - 1{,}2x - 2{,}1 = 0$.

Giải

a. Phương trình có: $a = 7$; $b = -2$; $c = 3$

$\Delta = (-2)^2 - 4.7.3 = -80 < 0$ hoặc $\Delta' = (-1)^2 - 7.3 = -20 < 0$.

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Phương trình có: $a = 5$; $b = 2\sqrt{10}$; $c = 2$

$\Delta = (2\sqrt{10})^2 - 4.5.2 = 0$ hoặc $\Delta' = (\sqrt{10})^2 - 5.2 = 0$.

Vậy, phương trình có 1 nghiệm kép.

c. Phương trình có: $a = \frac{1}{2}$; $b = 7$; $c = \frac{2}{3}$

$$\Delta = (7)^2 - 4.\frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{135}{3} > 0.$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

d. Phương trình có: $a = 1,7$; $b = -1,2$; $c = -2,1$

$\Delta = (-1,2)^2 - 4.1,7.(-2,1) = 15,72 > 0.$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 2: *Giải phương trình*: $-6x^2 + 7x - 2 = 0.$

Giải

Ta có thể thực hiện theo các cách:

Cách 1: (*Sử dụng công thức nghiệm tổng quát*): Ta có $a = -6, b = 7, c = -2$, suy ra

$\Delta = 7^2 - 4.(-6).(-2) = 49 - 48 = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1.$

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-7+1}{-12} = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{-7-1}{-12} = \frac{2}{3}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{3}.$

Cách 2: (*Sử dụng phép đổi dấu trước khi dùng công thức nghiệm tổng quát*): Viết lại phương trình dưới dạng: $6x^2 - 7x + 2 = 0.$

Ta có $a = 6, b = -7, c = 2$, suy ra $\Delta = (-7)^2 - 4.6.2 = 49 - 48 = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1.$

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{7+1}{12} = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{7-1}{12} = \frac{2}{3}.$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{3}.$

Nhận xét:

1. Trong lời giải của ví dụ trên, cho dù cùng là việc sử dụng công thức nghiệm tổng quát nhưng chúng ta thấy ngay cách giải 2 sẽ tránh được những sai sót không đáng có về dấu trong khi tính toán.
   Do đó, khi giải một phương trình bậc hai, ta cần chú ý biến đổi về phương trình có hệ số đơn giản nhất tương đương với phương trình đó để việc tính toán gọn hơn. Chẳng hạn, như trong phương trình trên có hệ số $a < 0$, ta nhân cả hai vế của phương trình với -1 để được phương trình có hệ số $a > 0$. Chúng ta sẽ minh hoạ thêm một ví dụ nữa.
2. Các em học sinh hãy giải phương trình trên bằng phương pháp phân tích.

Ví dụ 3: *Giải phương trình*: $x^2 + 2x - 3 = 0.$

Giải

Ta có thể thực hiện theo các cách:

Cách 1: Sử dụng kết quả $a + b + c = 0$

Ta có: $a + b + c = 1 + 2 - 3 = 0,$

suy ra, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1, x_2 = -3.$

Cách 2: Sử dụng công thức nghiệm tổng quát:

Ta có a = 1, b = 2, c = – 3, suy ra

$\Delta = 2^2 - 4.1.(-3) = 4 + 12 = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4.$

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \dfrac{-2+4}{2} = 1\ ,\ x_2 = \dfrac{-2-4}{2} = -3.$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1, x_2 = -3$.

Cách 3: Sử dụng công thức nghiệm thu gọn:

Ta có a = 1, b = 2 $\Rightarrow$ b' = 1, c = – 3, suy ra:

$\Delta' = 1^2 - 1.(-3) = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 2.$

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \dfrac{-1+2}{1} = 1\ ,\ x_2 = \dfrac{-1-2}{1} = -3.$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1, x_2 = -3$.

Cách 4: Sử dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử:

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x(x-1) + 3(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1, x_2 = -3$.

Cách 5: Sử dụng phương pháp biến đổi $A^2 = m$:

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 1 + 3 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=2 \\ x+1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1, x_2 = -3$.

Ví dụ 4: *Giải các phương trình*:

a. $\dfrac{4}{3}x^2 - 5x + 3 = 0.$ b. $\sqrt{2}\,x^2 - 2\sqrt{3}\,x - 12\sqrt{2} = 0.$

Giải

a. Thực hiện việc quy đồng mẫu số, phương trình có dạng:

$4x^2 - 15x + 9 = 0.$

Ta có a = 4, b = –15, c = 9, suy ra

$\Delta = (-15)^2 - 4.4.9 = 225 - 144 = 81 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 9.$

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = \dfrac{15+9}{8} = 3\ ,\ x_2 = \dfrac{15-9}{8} = \dfrac{3}{4}.$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 3, x_2 = \dfrac{3}{4}$.

b. Nhân hai vế của phương trình với $\sqrt{2}$, ta được: $2x^2 - 2\sqrt{6}x - 24 = 0$.

Ta có $a = 2, b = -2\sqrt{6} \Rightarrow b' = -\sqrt{6}, c = -24$, suy ra

$\Delta' = (-\sqrt{6})^2 - 2.(-24) = 6 + 48 = 54 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3\sqrt{6}$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{6}}{2} = -\sqrt{6}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 2\sqrt{6}, x_2 = -\sqrt{6}$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên:

1. Với phương trình trong câu a), để tránh việc tính toán với hệ số là phân số chúng ta đã thực hiện phép quy đồng (thực chất là nhân hai vế của phương trình với 3).
2. Với phương trình trong câu b), để tránh việc tính toán với tất cả các hệ số đều là số vô tỉ chúng ta đã thực hiện phép nhân hai vế của phương trình với $\sqrt{2}$.

Ví dụ 5: *Giải phương trình*: $\frac{1}{\sqrt{2}-1}x^2 + (\sqrt{2}-1)x - 2 = 0.$

✍ *Giải*

Ta có thể thực hiện theo các cách:

Cách 1: Thực hiện việc quy đồng mẫu số, phương trình có dạng:

$$x^2 + (\sqrt{2}-1)^2 x - 2(\sqrt{2}-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + (3 - 2\sqrt{2})x + 2 - 2\sqrt{2} = 0$$

Ta có $a = 1, b = 3 - 2\sqrt{2}, c = 2 - 2\sqrt{2}$, suy ra

$a - b + c = 1 - (3 - 2\sqrt{2}) + 2 - 2\sqrt{2} = 0.$

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 1, x_2 = 2\sqrt{2} - 2.$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1, x_2 = 2\sqrt{2} - 2.$

Cách 2: Thực hiện nhân liên hợp, phương trình có dạng:

$$\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}x^2 + (\sqrt{2}-1)x - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)x^2 + (\sqrt{2}-1)x - 2 = 0$$

Ta có $a = \sqrt{2} + 1, b = \sqrt{2} - 1, c = 2$, suy ra

$a - b + c = \sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2} - 1) + 2 = 0.$

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{2}{\sqrt{2}+1} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 2\sqrt{2} - 2.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1, x_2 = 2\sqrt{2} - 2.$

Ví dụ 6: *Xác định số nghiệm của các phương trình sau:*

a. $x^2 - mx - 1 = 0$. b. $x^2 + (m + 4)x + 4m = 0$.

c. $4x^2 + 12mx + 9m^2 = 0$. d. $x^2 + 2x + m^2 + 2 = 0$.

Giải

a. Với phương trình, ta có $a = 1, b = -m, c = -1$, suy ra:

$\Delta = (-m)^2 - 4.1.(-1) = m^2 + 4 > 0$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Với phương trình, ta có $a = 1, b = m + 4, c = 4m$, suy ra:

$\Delta = (m + 4)^2 - 4.1.4m = m^2 + 8m + 16 - 16m = m^2 - 8m + 16 = (m - 4)^2 \geq 0$.

Do đó:

- Với $m = 4$ thì phương trình có nghiệm kép.
- Với $m \neq 4$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c. Với phương trình, ta có $a = 4, b = 12m, c = 9m^2$, suy ra:

$\Delta = (12m)^2 - 4.4.9m^2 = 144m^2 - 144m^2 = 0$.

Do đó, phương trình có nghiệm kép.

d. Với phương trình, ta có $a = 1, b = 2, c = m^2 + 2$, suy ra:

$\Delta = 2^2 - 4.1.(m^2 + 2) = -4m^2 - 4 < 0$.

Do đó, phương trình vô nghiệm.

Nhận xét:

1. Như vậy, bằng việc xác định được dấu của Δ trong các phương trình có tham số chúng ta đã đưa ra lời kết luận nghiệm cho phương trình bậc hai và đây chính là bài toán xuôi. Các bài toán ngược (*Tìm điều kiện của tham số để phương trình vô nghiệm, có nghiệm kép, có hai nghiệm phân biệt*) được thực hiện theo chiều ngược lại.
2. Ta biết rằng với phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có: $\Delta = b^2 - 4ac$
   từ đó, nếu $ac < 0$ (đọc là a và c trái dấu) thì $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, tức là phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.
   Việc sử dụng kết quả này, trong nhiều trường hợp sẽ giúp giảm được các phép tính không cần thiết.

Ví dụ 7: *Giải và biện luận phương trình:* $x^2 - 4mx + 3m^2 = 0$. (1)

Giải

Ta có: $\Delta' = (-m)^2 - 3m^2 = -2m^2 \leq 0$, với $\forall m$.

Khi đó, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $\Delta' = 0 \Leftrightarrow -2m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Khi đó, phương trình có nghiệm kép $x = 0$.

Trường hợp 2: Với $\Delta' < 0 \Leftrightarrow -2m^2 < 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó, phương trình vô nghiệm.

Vậy, ta được:

- Với $m = 0$, phương trình có nghiệm kép $x = 0$.
- Với $m \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

Vấn đề 2: ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp

Với phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$.

để tìm điều kiện của tham số sao cho:

Dạng 1: Phương trình vô nghiệm, điều kiện là: $\Delta < 0$ (hoặc $\Delta' < 0$).

Dạng 2: Phương trình có nghiệm, điều kiện là: $\Delta \geq 0$ (hoặc $\Delta' \geq 0$).

Dạng 3: Phương trình có nghiệm kép, điều kiện là: $\Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$).

Dạng 4: Phương trình có hai nghiệm phân biệt, điều kiện là: $\Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$).

☞ ***Chú ý:*** Trong trường hợp hệ số a có chứa tham số, chúng ta cần xét hai trường hợp (với $a = 0$ và với $a \neq 0$) và khi đó:

1. *Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt,* bao gồm:
   - Điều kiện để phương trình là một phương trình bậc hai, tương ứng với $a \neq 0$.
   - Điều kiện để phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt, tương ứng với $\Delta > 0$.

   Tóm lại, ta có hệ điều kiện là: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

2. *Điều kiện để phương trình có nghiệm kép,* bao gồm:
   - Điều kiện để phương trình là một phương trình bậc hai, tương ứng với $a \neq 0$.
   - Điều kiện để phương trình bậc hai có nghiệm kép, tương ứng với $\Delta = 0$.

   Tóm lại, ta có hệ điều kiện là: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$.

Ví dụ 1: *Cho phương trình:* $x^2 - 2(m-1)x - m^2 - m - 1 = 0$.

a. *Giải phương trình với* $m = 1$.

b. *Tìm* m *để phương trình có nghiệm.*

✍ *Giải*

a. Với $m = 1$, phương trình có dạng: $x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Vậy, với $m = 1$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{3}$.

b. Để phương trình có nghiệm, điều kiện là:

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 - (-m^2 - m - 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow 2m^2 - m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(m - \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{8} \geq 0$, luôn đúng.

Vậy, với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

☞ *Nhận xét*: Trong lời giải của ví dụ trên:

1. Ở câu a), với m = 1 chúng ta nhận được một phương trình bậc hai khuyết b, do đó chúng ta thực hiện việc tìm nghiệm bằng phép biến đổi tương đương.
2. Ở câu b), chúng ta nhận thấy rằng $\Delta' > 0$ với mọi m, do đó câu b) còn có thể được phát biểu dưới dạng "*Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt*".
3. Chúng ta có thể chứng tỏ được $\Delta' > 0$ với mọi m bằng cách biến đổi:

$$\Delta = (m-1)^2 + m^2 + m + 1 = (m-1)^2 + (m + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall m.$$

Ví dụ 2: *Cho phương trình*: $mx^2 - 2(m+1)x + m + 2 = 0$.

a. *Giải phương trình với* m = 1.

b. *Chứng minh rằng với mọi* m *phương trình luôn có nghiệm.*

✍ *Giải*

Ta lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: (*Thực hiện tuần tự*): Ta có:

a. Với m = 1, phương trình có dạng: $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Nhận xét rằng a + b + c = 1 − 4 + 3 = 0 do đó, phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = 3$.

Vậy, với m = 1 phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$ và $x_2 = 3$.

b. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với m = 0, phương trình có dạng:

$-2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, tức là phương trình có nghiệm.

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$, ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - m(m+2) = 1 > 0$

do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Vậy, với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Cách 2: (*Sử dụng phép đánh giá*): Nhận xét rằng:

$$a + b + c = m - 2(m+1) + m + 2 = 0$$

do đó, phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{m+2}{m}$.

a. Với m = 1, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1$ và $x_2 = 3$.

b. Ta thấy ngay với mọi m phương trình luôn có nghiệm x = 1.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong cách 2 bằng việc đánh giá được: a + b + c = 0 chúng ta đã nhận được một lời giải rất gọn.

Ví dụ 3: *Cho phương trình:* $x^2 + 2mx + 4m - 3 = 0$.
Tìm m *để phương trình có nghiệm kép và chỉ ra nghiệm kép đó.*

✍ *Giải*

Với phương trình, ta có $a = 1, b = 2m \Rightarrow b' = m, c = 4m - 3$ suy ra:

$\Delta' = m^2 - 1.(4m - 3) = m^2 - 4m + 3.$

Phương trình có nghiệm kép khi và chỉ khi:

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1$ hoặc $m = 3$.

Khi đó:

- Với $m = 1$, phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{1}{1} = -1$.
- Với $m = 3$, phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{3}{1} = -3$.

☞ ***Nhận xét***: Trong lời giải của ví dụ trên:

1. Khi thực hiện giải phương trình $m^2 - 4m + 3 = 0$ chúng ta đã sử dụng tính chất $a + b + c = 0$ để nhận được ngay hai nghiệm $m = 1$ và $m = 3$.
2. Khi tìm nghiệm kép ứng với mỗi giá trị của m, chúng ta thay m vào công thức $x = -\frac{b'}{a} = -m$

Ví dụ 4: *Cho ba số dương* a, b, c *và phương trình*:

$$x^2 - 2x - \frac{a}{b+c} - \frac{b}{c+a} - \frac{c}{a+b} + \frac{5}{2} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm, từ đó xác định điều kiện của a, b, c *để phương trình có nghiệm kép.*

✍ *Giải*

Ta có: $\Delta' = 1 + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{5}{2} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2}$.

Nhận xét rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = (\frac{a}{b+c} + 1) + (\frac{b}{c+a} + 1) + (\frac{c}{a+b} + 1) - 3$$

$$= (a + b + c)(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}) - 3$$

$$= \frac{1}{2}[(a + b) + (b + c) + (c + a)][\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}] - 3$$

$$\geq \frac{1}{2}.3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}.3\frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} - 3$$

$$= \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2} \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\geq 0 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0.$$

Vậy, phương trình luôn có nghiệm.

Để phương trình có nghiệm kép, điều kiện là:

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow$ dấu đẳng thức xảy ra tại (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=b+c=c+a \\ \dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{1}{c+a} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c.$$

Vậy, với $a = b = c$ phương trình có nghiệm kép $x = 1$.

Ví dụ 5: *Cho phương trình:* $(m^2 - 1)x^2 + 2(m + 1)x + 1 = 0$.

a. *Giải phương trình với* $m = 2$.

b. *Tìm giá trị của* m *để phương trình có hai nghiệm phân biệt.*

c. *Tìm giá trị của* m *để phương trình có một nghiệm.*

Giải

a. Với $m = 2$, phương trình có dạng: $3x^2 + 6x + 1 = 0$.

Ta có: $\Delta' = 3^2 - 3 = 6 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{6}$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$, $x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}$.

Vậy, với $m = 2$ phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{6}}{3},\ x_2 = \frac{-3-\sqrt{6}}{3}.$$

b. Ta có: $\Delta' = (m + 1)^2 - (m^2 - 1) = m^2 + 2m + 1 - m^2 + 1 = 2m + 2$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt, điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \neq 0 \\ 2m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 1 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \neq 1.$$

Vậy, với $-1 < m \neq 1$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c. Ta đi xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Khi đó:

- Với $m = 1$, phương trình có dạng:

$$0.x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

- Với $m = -1$, phương trình có dạng: $0.x^2 + 0.x + 1 = 0$, vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Điều kiện để phương trình có một nghiệm là:

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$, không thoả mãn điều kiện.

Vậy, với $m = 1$ phương trình có một nghiệm duy nhất.

☞ *Nhận xét*: Trong lời giải câu b), nếu ta chỉ xét điều kiện:

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -1$$

thì với m = 1, phương trình (1) trở thành phương trình bậc nhất:

$$4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

là nghiệm duy nhất.

Ví dụ 6: *Cho hai phương trình*:

$$x^2 - mx - 2 = 0, \quad (1)$$

$$x^2 - x + 6m = 0. \quad (2)$$

Tìm giá trị của m *để phương trình* (1) *và phương trình* (2) *có ít nhất một nghiệm chung. Biết* m *là một số nguyên.*

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình.

Do đó:

$$x_0^2 - mx_0 - 2 = 0 \quad (1')$$

$$x_0^2 - x_0 + 6m = 0 \quad (2')$$

Lấy (1') trừ (2'), ta được: $x_0(-m + 1) - 2 - 6m = 0 \Leftrightarrow (1 - m)x_0 = 6m + 2$.

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Thay vào (1) và (2), ta được:

(1) $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$, có 2 nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = -1$.

(2) $\Leftrightarrow x^2 - x + 6 = 0$, vô nghiệm.

Suy ra, m = 1 không thoả mãn.

Trường hợp 2: Với $1 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, ta được $x_0 = \dfrac{6m + 2}{1 - m}$.

Thay x_0 vào (2'), ta được phương trình ẩn m:

$$\left(\frac{6m + 2}{1 - m}\right)^2 - \frac{6m + 2}{1 - m} + 6m = 0 \Leftrightarrow 6m^3 + 30m^2 + 26m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6m^3 + 30m^2 + 24m + 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m(6m^2 + 30m + 24) + 2(m + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m + 1)(m + 4) + 2(m + 1) = 0 \Leftrightarrow (m + 1)[m(m + 4) + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + 1)[m^2 + 4m + 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m + 1 = 0 \\ m^2 + 4m + 2 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = -1 \\ m = -2 \pm \sqrt{2} \ (\text{loại}) \end{bmatrix}.$$

Thử lại, với m = – 1, ta có:

(1) $\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$, có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -2$ và $x_2 = 1$.

(2) $\Leftrightarrow x^2 - x + 6 = 0$, có hai nghiệm phân biệt $x_3 = -2$ và $x_4 = 3$.

Vậy, với m = – 1, hai phương trình có một nghiệm chung.

Cách 2: Các phương trình đã cho có nghiệm chung khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 - mx - 2 = 0 \\ x^2 - x + 6m = 0 \end{cases}.$$

Đặt $x^2 = y$, ta được hệ: $\begin{cases} y - mx - 2 = 0 \\ y - x + 6m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx - y = -2 \quad (1) \\ x - y = 6m \quad (2) \end{cases}$. (I)

Xét phương trình (2) của hệ, ta biến đổi: $y = x - 6m$. (3)

Thay (3) vào phương trình (1), ta được:

$mx - x + 6m = -2 \Leftrightarrow (m - 1)x = -6m - 2$.

Trường hợp 1: Với $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Khi đó, hệ (I) có dạng: $\begin{cases} x - y = -2 \\ x - y = 6 \end{cases}$, vô nghiệm.

Suy ra, $m = 1$ không thoả mãn.

Trường hợp 2: Với $1 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, ta được $x = \dfrac{6m + 2}{1 - m}$.

Thay $x = \dfrac{6m + 2}{1 - m}$ vào (3), ta được:

$$y = \frac{6m + 2}{1 - m} - 6m = \frac{6m + 2 - 6m(1 - m)}{1 - m} = \frac{6m^2 + 2}{1 - m}.$$

Do $x^2 = y$, nên ta phải có:

$$\left(\frac{6m + 2}{1 - m}\right)^2 = \frac{6m^2 + 2}{1 - m} \Leftrightarrow 3m^3 + 15m^2 + 13m + 1 = 0$$

$\Leftrightarrow (m + 1)(3m^2 + 12m + 1) = 0 \Leftrightarrow m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy, với $m = -1$ hai phương trình có nghiệm chung là $x = 1$.

Ví dụ 7: *Chứng minh rằng*:

a. *Nghiệm của phương trình* $ax^2 + bx + c = 0$ *cũng là nghiệm của phương trình* $-ax^2 - bx - c = 0$.

b. *Hai phương trình* $ax^2 + bx + c = 0$ *và phương trình* $ax^2 - bx + c = 0$ *cùng có nghiệm hoặc cùng vô nghiệm.*

Giải

a. Nhận xét rằng: $ax^2 + bx + c = 0 \overset{\times(-1)}{\Leftrightarrow} -ax^2 - bx - c = 0$

do đó, nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ cũng là nghiệm của phương trình $-ax^2 - bx - c = 0$.

b. Nhận xét rằng, hai phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ và $ax^2 - bx + c = 0$ cùng có biệt số: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Vậy, hai phương trình cùng có nghiệm hoặc cùng vô nghiệm.

Ví dụ 8: *Cho hai phương trình:*

$$x^2 + ax + b = 0 \quad (1)$$
$$x^2 + cx + d = 0. \quad (2)$$

Biết rằng $ac \geq 2(b + d)$. *Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm.*

Giải

Gọi $\Delta_{(1)}$, $\Delta_{(2)}$ theo thứ tự là biệt số của phương trình (1) và (2), ta có:

$\Delta_{(1)} = a^2 - 4b$; $\Delta_{(2)} = c^2 - 4d$.

Nhận xét rằng:

$$\Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} = a^2 - 4b + c^2 - 4d = (a^2 + c^2) - 4(b + d)$$
$$\geq 2ac - 4(b + d) \geq 4(b + d) - 4(b + d) = 0.$$

$\Leftrightarrow \Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} \geq 0$

$\Leftrightarrow$ Ít nhất một trong hai $\Delta_{(1)}, \Delta_{(2)}$ không âm

$\Leftrightarrow$ Ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm, đpcm.

☞ ***Nhận xét***: Trong lời giải của ví dụ trên, chúng ta đã sử dụng kết quả:

$A + B \geq 0 \Leftrightarrow$ tồn tại một số không âm.

Ngoài ra, chúng ta còn có:

1. $A + B < 0 \Leftrightarrow$ tồn tại một số âm.
   Kết quả này được sử dụng để chứng minh "*ít nhất một trong hai phương trình vô nghiệm* ".
2. $A.B < 0 \Leftrightarrow$ hai số trái dấu.
   Kết quả này được sử dụng để chứng minh "*Chỉ có một trong hai phương trình có nghiệm* ".
3. $A.B > 0 \Leftrightarrow$ hai số cùng dấu.
   Kết quả này được sử dụng để chứng minh "*Hoặc cả hai phương trình đều có hai nghiệm phân biệt hoặc chúng cùng vô nghiệm* ".

Ví dụ 9: *Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:*

$$x^2 + 2mx + 3 = 0 \quad (1)$$
$$x^2 + 3x + 2m = 0. \quad (2)$$

Giải

Gọi $\Delta_{(1)}$, $\Delta_{(2)}$ theo thứ tự là biệt số của phương trình (1) và (2), ta có:

$\Delta_{(1)} = m^2 - 3$, $\Delta_{(2)} = 9 - 2m$.

Nhận xét rằng:

$$\Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} = m^2 - 3 + 9 - 2m = m^2 - 2m + 6 = (m - 1)^2 + 5 > 0.$$

$\Leftrightarrow \Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} > 0 \Leftrightarrow$ Ít nhất một trong hai $\Delta_{(1)}, \Delta_{(2)}$ dương

$\Leftrightarrow$ Ít nhất một trong hai phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ 10: *Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau vô nghiệm:*

$$x^2 + 2x - 6m = 0 \quad (1)$$
$$x^2 + 4x + m^2 + 15 = 0. \quad (2)$$

Giải

Gọi $\Delta_{(1)}$, $\Delta_{(2)}$ theo thứ tự là biệt số của phương trình (1) và (2), ta có:

$\Delta_{(1)} = 1 + 6m$, $\Delta_{(2)} = 4 - m^2 - 15 = -m^2 - 11$.

Nhận xét rằng:

$\Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} = 1 + 6m - m^2 - 11 = -(m^2 - 6m + 9) - 1 = -(m-3)^2 - 1 < 0.$

$\Leftrightarrow \Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} < 0 \Leftrightarrow$ Ít nhất một trong hai $\Delta_{(1)}, \Delta_{(2)}$ âm

$\Leftrightarrow$ Ít nhất một trong hai phương trình vô nghiệm.

Vấn đề 3: NGHIỆM NGUYÊN VÀ NGHIỆM HỮU TỈ CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp

Với a, b, c là các số nguyên, xét phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$. (1) với yêu cầu tìm điều kiện để phương trình (1) có nghiệm nguyên hay nghiệm hữu tỷ. Khi đó ta sử dụng kết quả của hai định lý sau:

Định lý 1: Điều kiện cần và đủ để phương trình (1) có nghiệm hữu tỷ là biệt số Δ là một số chính phương.

Định lý 2: Nếu $x_0 = \frac{p}{q}$ với (p, q)=1 là nghiệm hữu tỷ của (1) thì q là ước của a và p là ước của c.

Ví dụ 1: *Tìm các số nguyên* a *để phương trình*: $x^2 - (3 + 2a)x + 40 - a = 0$ *có nghiệm nguyên.*

Giải

Phương trình có nghiệm nguyên khi $\Delta = 4a^2 + 16a - 151$ là số chính phương, tức là:

$4a^2 + 16a - 151 = k^2$ với $k \in Z \Leftrightarrow (2a + 4)^2 - k^2 = 167$ với $k \in Z$.

$\Leftrightarrow (2a + 4 + k)(2a + 4 - k) = 167$ với $k \in Z$.

Vì 167 là số nguyên tố, nên:
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a + 4 + k = 1 \\ 2a + 4 - k = 167 \end{cases} \quad (I) \\ \begin{cases} 2a + 4 + k = -1 \\ 2a + 4 - k = -167 \end{cases} \quad (II) \end{array}\right.$$

- Xét hệ (I), suy ra: $4a + 8 = 168 \Leftrightarrow a = 40$

  Với a = 40, phương trình có dạng:

$$x^2 - 83x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 83 \end{array}\right.$$, là các nghiệm nguyên.

- Xét hệ (II), suy ra: $4a + 8 = -168 \Leftrightarrow a = -44$

  Với $a = -44$, phương trình có dạng:

$$x^2 - 85x + 84 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = 84 \end{bmatrix}, \text{ là các nghiệm nguyên.}$$

Vậy, tồn tại hai giá trị $a = 40$ và $a = -44$ để phương trình có nghiệm nguyên.

Ví dụ 2: *Chứng minh rằng nếu phương trình:* $x^2 + ax + b = 0$. *với* a, b *là các số nguyên, có các nghiệm hữu tỷ, thì các nghiệm đó là những số nguyên.*

Giải

Nghiệm của phương trình đã cho là: $x_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$.

Do các nghiệm là hữu tỷ nên $a^2 - 4b$ phải là số chính phương, tức là:

$a^2 - 4b = k^2, k \in Z.$ (1)

Xét hai khả năng xảy ra đối với a

a. Giả sử a là số lẻ, khi đó từ (1) suy ra k lẻ.

b. Giả sử a là số chẵn, khi đó từ (1) suy ra k chẵn.

Vậy a, k cùng tính chẵn , lẻ.

Suy ra $-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}$ là một số chẵn, tức $x_{1,2}$ là những số nguyên.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a. $4x^2 - 6x + 7 = 0.$

b. $9x^2 - 6x + 26 = 0.$

c. $x^2 + 4x - 12 = 0.$

d. $x^2 + 8x - 10 = 0.$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a. $x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} = 0.$

b. $\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{1}{2}x - 1 = 0.$

c. $5x^2 - x + \dfrac{5}{49} = 0.$

d. $\dfrac{2}{5}x^2 + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{15} = 0.$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a. $x^2 - (2 + \sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0.$

b. $x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}x + \sqrt{6} = 0.$

c. $\sqrt{2}x^2 - 5x + 3\sqrt{2} = 0.$

d. $\sqrt{6}x^2 + 2(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})x + 24 = 0.$

Bài 4: Giải và biện luận các phương trình sau:

a. $x^2 + 4x - 3m = 0.$

b. $x^2 - 4x + 4 - m^2 = 0.$

c. $x^2 + 2mx - 4 = 0.$

d. $x^2 - (m - 2)x + m^2 = 0.$

Bài 5: Cho phương trình: $x^2 - 3mx - 6m^2 = 0.$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình vô nghiệm.

Bài 6: Cho phương trình: $5x^2 + 2mx - 3m = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm kép.

Bài 7: Cho phương trình: $x^2 + 3x - (m^2 - 2m + 1) = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 8: Cho phương trình: $x^2 - (m - 1)x - m^2 + m - 1 = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 3$.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 9: Cho phương trình: $mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0$.

a. Tìm m để phương trình có nghiệm.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 10: Cho phương trình: $mx^2 + (m + 1)x - 2m = 0$.

a. Giải phương trình với $m = -\frac{1}{2}$.

b. Tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm.

Bài 11: Tìm giá trị của m để các phương trình sau có nghiệm kép:

a. $mx^2 - 2x + 6m = 0$.

b. $m^2x^2 + 10x + 1 = 0$.

Bài 12: Tìm giá trị của m để các phương trình sau vô nghiệm:

a. $mx^2 + 2(m - 3)x + m = 0$.

b. $(m - 2)x^2 - 2(m - 2)x - m = 0$.

Bài 13: Cho phương trình: $mx^2 - (m + 1)x + 1 = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 89$.

b. Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Bài 14: Cho phương trình: $mx^2 - (3m + 1)x + 3 = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 2$.

b. Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Bài 15: Cho phương trình: $mx^2 + 2(m - 1)x - 2 = 0$.

a. Giải phương trình với $m = \sqrt{3}$

b. Tìm m để phương trình có một nghiệm.

Bài 16: Chứng minh rằng với mọi m phương trình sau luôn có nghiệm:

$$mx^2 - (3m + 1)x + 2m + 2 = 0.$$

Bài 17: Chứng minh rằng với mọi m phương trình sau luôn có nghiệm:

$$m(m - 1)x^2 - (2m - 1)x + 1 = 0.$$

Bài 18: Cho hai số dương a, b và phương trình: $x^2 - 2x - \frac{a}{b} - \frac{b}{a} + 3 = 0$.

Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm, từ đó xác định điều kiện của a, b để phương trình có nghiệm kép.

Bài 19: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng phương trình:

$$x^2 - 2x - ab(a + b - 2c) - bc(b + c - 2a) - ca(c + a - 2b) + 1 = 0$$

luôn luôn có nghiệm. Khi đó tìm điều kiện của a, b, c để phương trình có nghiệm kép.

Bài 20: Giả sử a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng phương trình:

$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ vô nghiệm.

Bài 21: Cho hai phương trình: $x^2 - mx + 2 = 0$; $x^2 - 4x + m = 0$

Tìm m để hai phương trình trên có ít nhất một nghiệm chung.

Bài 22: Cho hai phương trình: $x^2 + x + a = 0$ và $x^2 + ax + 1 = 0$.

a. Với giá trị nào của a thì hai phương trình có nghiệm chung.

b. Với giá trị nào của a thì hai phương trình tương đương.

Bài 23: Tìm các số nguyên a để phương trình $x^2 - 3ax + 3 - a = 0$ có nghiệm nguyên.

Bài 24: Tìm các số nguyên a để phương trình: $ax^2 - (a + 3)x + a + 2 = 0$ có nghiệm nguyên.

Bài 25: Tìm các số nguyên a để phương trình $(a + 1)x^2 - 3(a + 1)x + 4a = 0$ có nghiệm nguyên.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: a. Vô nghiệm. b. Vô nghiệm.

c. $x_1 = 2$ và $x_2 = -6$. d. $x_1 = -4 + \sqrt{26}$ và $x_2 = -4 - \sqrt{26}$.

Bài 2: a. $x_1 = 1$ và $x_2 = -\frac{1}{2}$. b. $x_1 = 2$ và $x_2 = -\frac{3}{2}$.

c. $x_1 = x_2 = \frac{1}{7}$. d. $x_1 = -\frac{1}{2}$ và $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Bài 3: a. $x_1 = 2$ và $x_2 = \sqrt{2}$. b. $x_1 = -\sqrt{3}$ và $x_2 = -\sqrt{2}$.

c. $x_1 = \sqrt{2}$ và $x_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}$. d. $x_1 = -2\sqrt{3}$ và $x_2 = -2\sqrt{2}$.

Bài 4:

a. Ta có: $\Delta' = 4 + 3m$.

Khi đó, ta xét ba trường hợp:

Trường hợp 1: Với $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{4}{3}$.

Khi đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = -2 + \sqrt{4+3m}$ và $x_2 = -2 - \sqrt{4+3m}$.

Trường hợp 2: Với $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 4 + 3m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}$.

Khi đó, phương trình có nghiệm kép $x = -2$.

Trường hợp 3: Với $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 4 + 3m < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{4}{3}$.

Khi đó, phương trình vô nghiệm.

Vậy:

- Với $m > -\frac{4}{3}$, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = -2 + \sqrt{4+3m}$ và $x_2 = -2 - \sqrt{4+3m}$.

- Với $m = -\frac{4}{3}$, phương trình có nghiệm kép $x = -2$.
- Với $m < -\frac{4}{3}$, phương trình vô nghiệm.

b. Ta có: $\Delta' = 4 - (4 - m^2) = m^2 \geq 0$, với $\forall m$. Khi đó, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Khi đó, phương trình có nghiệm kép $x = 2$.

Trường hợp 2: Với $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 2 + m$ và $x_2 = 2 - m$.

Vậy:
- Với $m = 0$, phương trình có nghiệm kép $x = 2$.
- Với $m \neq 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 2 + m$ và $x_2 = 2 - m$.

c. Ta có: $\Delta' = m^2 + 4 > 0$, với $\forall m$.

Do đó, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = -m + \sqrt{m^2 + 4}$ và $x_2 = -m - \sqrt{m^2 + 4}$.

d. Tương tự câu a).

Bài 5:

a. Với $m = 1$, phương trình có dạng: $x^2 - 3x - 6 = 0$.

Ta có: $\Delta = 3^2 + 6 = 15 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{15}$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{3+\sqrt{15}}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{15}}{2}$.

Vậy, với $m = 1$ phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{3+\sqrt{15}}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{15}}{2}$.

b. Để phương trình vô nghiệm, điều kiện là:

$\Delta < 0 \Leftrightarrow 9m^2 + 6m^2 < 0 \Leftrightarrow 15m^2 < 0$, vô nghiệm.

Vậy, không tồn tại m để phương trình vô nghiệm.

Bài 6:

a. Với $m = 1$, phương trình có dạng: $5x^2 + 2x - 3 = 0$.

Ta có: $a - b + c = 5 - 2 - 3 = 0$

do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1$ và $x_2 = \frac{3}{5}$.

Vậy, với $m = 1$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1$ và $x_2 = \frac{3}{5}$.

b. Để phương trình có nghiệm kép, điều kiện là:

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 + 15m = 0 \Leftrightarrow m(m + 15) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = -15$.

Vậy, với $m = 0$ hoặc $m = -15$ phương trình có nghiệm kép.

Bài 7:

a. Với $m = 1$, phương trình có dạng: $x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -3$.

Vậy, với $m = 1$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 0$ và $x_2 = -3$.

b. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt, điều kiện là:

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 9 + m^2 - 2m + 1 > 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 + 9 > 0$, luôn đúng.

Vậy, với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài 8:

a. Với m = 3, phương trình có dạng: $x^2 - 2x - 7 = 0$.

Ta có $\Delta' = 1^2 + 7 = 8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 1 + 2\sqrt{2}$, $x_2 = 1 - 2\sqrt{2}$.

Vậy, với m = 3 phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = 1 + 2\sqrt{2}$, $x_2 = 1 - 2\sqrt{2}$.

b. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt, điều kiện là:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + m^2 - m + 1 > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài 9:

a. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với m = 0, khi đó phương trình có dạng: $4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.

Vậy, m = 0 thoả mãn điều kiện có nghiệm.

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$, khi đó để phương trình có nghiệm điều kiện là:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 - m(m-3) \geq 0 \Leftrightarrow 4 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 4.$$

Vậy, với $m \leq 4$ phương trình có nghiệm.

b. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt, điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4.$$

Vậy, với $m < 4$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 10:

a. Với $m = -\frac{1}{2}$, phương trình có dạng:

$$-\frac{1}{2}x^2 + (-\frac{1}{2} + 1)x - 2(-\frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 \text{ và } x_2 = 2.$$

Vậy, với $m = -\frac{1}{2}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1$ và $x_2 = 2$.

b. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với m = 0, khi đó phương trình có dạng x = 0.

Vậy, m = 0 thoả mãn điều kiện có nghiệm.

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$, khi đó để phương trình có nghiệm điều kiện là:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 + 2m^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Bài 11:

a. Phương trình có nghiệm kép, điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - 6m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Vậy, với $m = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$ phương trình có nghiệm kép.

b. Phương trình có nghiệm kép, điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \neq 0 \\ 25 - m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 5.$$

Vậy, với $m = \pm 5$ phương trình có nghiệm kép.

Bài 12:

a. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $m = 0$, khi đó phương trình có dạng: $-6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy, $m = 0$ không thoả mãn điều kiện vô nghiệm.

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$, khi đó để phương trình vô nghiệm điều kiện là:

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow (m-3)^2 - m^2 < 0 \Leftrightarrow 9 - 6m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}.$$

Vậy, với $m > \frac{3}{2}$ phương trình vô nghiệm.

b. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Khi đó phương trình có dạng: $-2 = 0$, mâu thuẫn.

Vậy, $m = 2$ thoả mãn điều kiện vô nghiệm.

Trường hợp 2: Với $m \neq 2$, khi đó để phương trình vô nghiệm điều kiện là:

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 + m(m-2) < 0 \Leftrightarrow (m-2)(m-2+m) < 0$$
$$\Leftrightarrow (m-2)(2m-2) < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

Vậy, với $1 < m < 2$ phương trình vô nghiệm.

Bài 13: Nhận xét rằng: $a + b + c = m - m - 1 + 1 = 0$

do đó, phương trình luôn có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{1}{m}$.

a. Với $m = 2$, phương trình có nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{1}{2}$.

b. Ta thấy ngay, với mọi m phương trình luôn có nghiệm $x = 1$.

Bài 14:

a. Với $m = 2$, phương trình có dạng: $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Ta có: $\Delta = (-7)^2 - 4.2.3 = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{7+5}{4} = 3$.

Vậy, với $m = 2$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$.

b. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $m = 0$, khi đó phương trình có dạng:

$-x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, tức là phương trình có nghiệm.

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$.

Ta xét: $\Delta = (3m+1)^2 - 12m = (3m-1)^2 \geq 0$, với mọi $m \neq 0$

$\Leftrightarrow$ phương trình luôn có nghiệm.

Vậy, với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Bài 15:

a. Với $m = \sqrt{3}$, phương trình có dạng: $\sqrt{3}x^2 + 2(\sqrt{3} - 1)x - 2 = 0$.

Ta có: $\Delta' = (\sqrt{3} - 1)^2 + 2\sqrt{3} = 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2$.

Do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}, \; x_2 = \frac{1-\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1.$$

Vậy, với $m = \sqrt{3}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \sqrt{3} - 1$.

b. Xét hai trường hợp của m.

Trường hợp 1. Với $m = 0$

$(1) \Leftrightarrow -2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Trường hợp 2. Với $m \neq 0$.

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow m^2 + 1 = 0$ vô nghiệm.

Vậy, với $m = 0$ phương trình có nghệm duy nhất.

Bài 16: *Học sinh tự làm.*

Bài 17: *Học sinh tự làm.*

Bài 18: Ta có: $\Delta' = 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 3 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2$.

Nhận xét rằng:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}} = 2 \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0.$$

Vậy, phương trình luôn có nghiệm.

Để phương trình có nghiệm kép, điều kiện là:

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow$ dấu đẳng thức xảy ra tại (*)

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b, \text{ vì a, b dương.}$$

Vậy, với $a = b$ phương trình có nghiệm kép $x = 1$.

Bài 19: Ta có:

$$\Delta' = 1 + ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ca(c + a - 2b) - 1$$
$$= ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ca(c + \quad).$$

Ta đi chứng minh

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ca(c + a - 2b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b-2c}{c} + \frac{b+c-2a}{a} + \frac{c+a-2b}{b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} \geq 6. \qquad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho VT, ta được:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\geq 6.\sqrt[6]{\frac{a}{c}.\frac{b}{c}.\frac{b}{a}.\frac{c}{a}.\frac{c}{b}.\frac{a}{b}}=6, \text{đpcm.}$$

Vậy, phương trình luôn có nghiệm.

Để phương trình có nghiệm kép, điều kiện là:

$$\Leftrightarrow \text{dấu đẳng thức xảy ra tại (*) } \frac{a}{c}=\frac{b}{c}=\frac{b}{a}=\frac{c}{a}=\frac{c}{b}=\frac{a}{b}\Leftrightarrow a=b=c.$$

Vậy, với $a = b = c$ phương trình có nghiệm kép $x = 1$.

Bài 20: Ta có:

$$\Delta=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2=(b^2+c^2-a^2-2bc)(b^2+c^2-a^2-2bc)$$
$$=[(b-c)^2-a^2][(b+c)^2-a^2]=(b-c-a)(b-c+a)(b+c-a)(b+c+a)$$

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên: $\begin{cases} b-c-a<0 \\ b-c+a>0 \\ b+c-a>0 \\ b+c+a>0 \end{cases}$

do đó $\Delta < 0$, tức là phương trình vô nghiệm.

Bài 21: Kí hiệu hai phương trình theo thứ tự là (1) và (2).

Giả sử x_0 là nghiệm chung của hai phương trình.

Do đó:

$$x_0^2-mx_0+2=0 \quad (1')$$
$$x_0^2-4x_0+m=0 \quad (2')$$

Lấy (1') trừ (2'), ta được: $x_0(-m+4)+2-m=0\Leftrightarrow (m-4)x_0=2-m$.

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $m-4=0\Leftrightarrow m=4$.

Thay $m = 4$ vào (1) và (2), ta được:

(1) $\Leftrightarrow x^2-4x+2=0$, có 2 nghiệm $x_1=2-\sqrt{2}$ và $x_2=2+\sqrt{2}$.

(2) $\Leftrightarrow x^2-4x+4=0$, có nghiệm kép $x = 2$.

Suy ra, $m = 4$ không thoả mãn.

Trường hợp 2: Với $m-4\neq 0\Leftrightarrow m\neq 4$, ta được $x_0=\dfrac{2-m}{m-4}$.

Thay x_0 vào (1), ta được phương trình ẩn m:

$$\left(\frac{2-m}{m-4}\right)^2-m.\frac{2-m}{m-4}+2=0\Leftrightarrow m^3-3m^2-12m+36=0$$

$$\Leftrightarrow (m-3)(m^2-12)=0\Leftrightarrow \begin{bmatrix} m-3=0 \\ m^2-12=0 \end{bmatrix}\Leftrightarrow \begin{bmatrix} m=3 \\ m=\pm 2\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Thử lại:

- Với $m = 3$, ta có:

  (1) $\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$, có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$.

  (2) $\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$, có hai nghiệm $x_3 = 1$ và $x_4 = 3$.

  Vậy, với $m = 3$, hai phương trình có một nghiệm chung $x = 1$.

- Với $m = 2\sqrt{3}$, ta có:

$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$, có hai nghiệm $x_{1,2} = \sqrt{3} \pm 1$.

$(2) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2\sqrt{3} = 0$, có hai nghiệm:

$x_3 = 2 - (\sqrt{3} - 1) = 3 - \sqrt{3}$

$x_4 = 2 + (\sqrt{3} - 1) = 1 + \sqrt{3}$.

Vậy, với $m = 2\sqrt{3}$, hai phương trình có một nghiệm chung $x = \sqrt{3} + 1$.

- Với $m = -2\sqrt{3}$, ta có:

$(1) \Leftrightarrow x^2 + 2\sqrt{3}x + 2 = 0$, có hai nghiệm $x_{1,2} = -\sqrt{3} \pm 1$.

$(2) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2\sqrt{3} = 0$, có hai nghiệm:

$x_3 = 2 - (\sqrt{3} + 1) = 1 - \sqrt{3}$

$x_4 = 2 + (\sqrt{3} + 1) = 3 + \sqrt{3}$.

Vậy, với $m = 2\sqrt{3}$, hai phương trình có một nghiệm chung $x = 1 - \sqrt{3}$.

Vậy, với $m = 3$ hoặc $m = \pm 2\sqrt{3}$ hai phương trình có nghiệm chung.

Bài 22: Kí hiệu hai phương trình theo thứ tự là (1) và (2).

a. Giả sử hai phương trình có nghiệm chung x_0, khi đó:

$$x_0^2 + x_0 + a = 0 \quad (3)$$

$$x_0^2 + ax_0 + 1 = 0 \quad (4)$$

Lấy (3)–(4), ta được: $(1 - a)(x_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow a = 1$ hoặc $x_0 = 1$.

- Với $a = 1$, ta thấy:

$(1) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$, vô nghiệm.

$(2) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$, vô nghiệm.

Vậy $a = 1$ không thoả mãn.

- Với $x_0 = 1$, thay vào (3) được: $1 + 1 + a = 0 \Leftrightarrow a = -2$.

Thử lại, với $a = -2$, ta được:

$(1) \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$, có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = -2$.

$(2) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$, có nghiệm kép $x = 1$.

Tức là, hai phương trình có một nghiệm chung là $x=1$.

Vậy, với $a = -2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Hai phương trình tương đương nếu xảy ra một trong hai khả năng sau:

Khả năng 1: Mọi nghiệm của (1) đều là nghiệm của (2) và ngược lại.

Khả năng 2: Hai phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm.

Theo kết quả câu a) khả năng thứ nhất không thể xảy ra.

Vậy, chỉ có thể là hai phương trình đều vô nghiệm, tức là:

$$\begin{cases} \Delta_{(1)} < 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4a < 0 \\ a^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < a < 2.$$

Vậy, với $\frac{1}{4} < a < 2$ hai phương trình đã cho tương đương.

CHỦ ĐỀ 5

HỆ THỨC VIÉT VÀ CÁC ỨNG DỤNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Nếu phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$

có hai nghiệm x_1 và x_2 thì: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: NHẨM NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp

Để thực hiện việc nhẩm nghiệm (nếu có thể) cho phương trình:

$x^2 + bx + c = 0$

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thiết lập hệ thức Viét cho các nghiệm x_1 và x_2: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1.x_2 = c \end{cases}$.

Bước 2: Thực hiện phép phân tích c thành tích của hai thừa số, c = m.n.

Với mỗi cặp thừa số phân tích được, ta tính ngay m + n, khi đó:

a. Nếu m + n = –b, chuyển sang bước 3.

b. Nếu m + n ≠ –b, thực hiện lại bước 2.

Bước 3: Vậy, phương trình có hai nghiệm là $x_1 = m$ và $x_2 = n$.

☞ ***Chú ý***:

1. Thuật toán trên có tính *dừng* và được hiểu như sau:
   - Nếu tìm được một cặp (m, n) thoả mãn điều kiện m + n = –b thì dừng lại phép thử và đưa ra lời kết luận.
   - Nếu các cặp (m, n) đều không thoả mãn thì dừng và trong trường hợp này được hiểu là không nhẩm được nghiệm.
2. Chúng ta đã biết hai trường hợp đặc biệt của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là:
   - Nếu a + b + c = 0 thì phương trình có nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \dfrac{c}{a}$.
   - Nếu a – b + c = 0 thì phương trình có nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = -\dfrac{c}{a}$.

Ví dụ 1: (Bài 26/tr 53 – Sgk): *Dùng điều kiện* a + b + c = 0 *hoặc* a – b + c = 0 *để tính nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau*:

a. $35x^2 - 37x + 2 = 0$.

b. $7x^2 + 500x - 507 = 0$.

c. $x^2 - 49x - 50 = 0$.

d. $4321x^2 + 21x - 4300 = 0$.

✍ *Giải*

a. Ta có $35 - 37 + 2 = 0$.

Theo hệ thức Viét, phương trình có nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{2}{35}$.

b. Ta có: $7 + 500 - 507 = 0$.

Theo hệ thức Viét, phương trình có nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{507}{7}$.

c. Ta có $1 - (-49) - 50 = 0$.

Theo hệ thức Viét, phương trình có nghiệm là $x_1 = -1$ và $x_2 = -\frac{(-50)}{1} = 50$.

d. Ta có $4321 - 21 + (-4300) = 0$

Theo hệ thức Viét, phương trình có nghiệm là $x_1 = -1$ và $x_2 = -\frac{(-4300)}{4321} = \frac{4300}{4321}$.

Ví dụ 2: (Bài 26/tr 53 – Sgk): *Tính nhẩm nghiệm của các phương trình*:

a. $1,5x^2 - 1,6x + 0,1 = 0$.

b. $\sqrt{3}\,x^2 - (1 - \sqrt{3})x - 1 = 0$.

c. $(2 - \sqrt{3})x^2 + 2\sqrt{3}\,x - (2 + \sqrt{3}) = 0$.

d. $(m - 1)x^2 - (2m + 3)x + m + 4 = 0$, với $m \neq 1$.

✍ *Giải*

a. Ta có $1,5 + (-1,6) + 0,1 = 0$.

Do đó, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{0,1}{1,5} = \frac{1}{15}$.

b. Ta có $\sqrt{3} - [-(1 - \sqrt{3})] + (-1) = 0$.

Do đó, phương trình có nghiệm $x = -1$ và $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

c. Ta có $(2 - \sqrt{3}) + 2\sqrt{3} + [-(2 + \sqrt{3})] = 0$.

Do đó, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = -\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = -7 - 4\sqrt{3}$.

d. Ta có $(m - 1) - (2m + 3) + m + 4 = 0$

Do đó, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{m+4}{m-1}$.

Ví dụ 3: *Trình bày cách nhẩm nghiệm cho phương trình* $x^2 - 5x + 6 = 0$.

✍ *Giải*

Ta thấy $\Delta = 5^2 - 4.1.6 = 1 > 0$ do đó, phương trình luôn có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1.x_2 = 6 = 2.3 \end{cases}$ mà $2 + 3 = 5$.

Vậy, ta thấy ngay phương trình có hai nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = 3$.

Ví dụ 4: *Trình bày cách nhẩm nghiệm cho các phương trình sau:*

a. $-x^2 - 13x + 48 = 0$. b. $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 = 0$.

✍ *Giải*

a. Viết lại phương trình dưới dạng: $x^2 + 13x - 48 = 0$.

Khi đó: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -13 \\ x_1.x_2 = -48 = 3.(-16) \end{cases}$, mà $3 + (-16) = -13$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x_1 = 3$ và $x_2 = -16$.

b. Viết lại phương trình dưới dạng: $x^2 - 8x + 12 = 0$.

Khi đó: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1.x_2 = 12 = 2.6) \end{cases}$, mà $2 + 6 = 8$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = 6$.

☞ ***Nhận xét***: Ví dụ trên, được nêu ra với mục đích khuyên cách em học sinh hãy thực hiện việc chuyển đổi phương trình ban đầu về dạng đơn giản nhất trước khi thực hiện công việc nhẩm nghiệm để tránh được những sai sót không đáng có.

Vấn đề 2: TÌM HAI SỐ BIẾT TỔNG VÀ TÍCH CỦA CHÚNG

Phương pháp

Nếu hai số u và v thoả mãn: $\begin{cases} u + v = S \\ uv = P \end{cases}$

thì u, v là nghiệm của phương trình: $t^2 - St + P = 0$. (1)

☞ ***Nhận xét***: Nếu (1) có hai nghiệm t_1, t_2 (điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$) thì ta được:

$$\begin{bmatrix} u = t_1 \ \& \ v = t_2 \\ u = t_2 \ \& \ v = t_1 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 1: (Bài 26/tr 53 – Sgk): *Tìm hai số* u *và* v *trong mỗi trường hợp sau:*

a. $u + v = 32, uv = 231$. b. $u + v = -8, uv = -105$.

b. $u + v = 2, uv = 9$.

✍ *Giải*

a. Ta có: $u + v = 32$, $uv = 231$.

Do đó, u và v là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 32x + 231 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 = 16 + \sqrt{25} = 21 \\ x_2 = 16 - \sqrt{25} = 11 \end{bmatrix}$$

Vậy, ta có hai cặp nghiệm $u = 21$ và $v = 11$ hoặc $u = 11$ và $v = 21$.

b. Ta có: $u + v = -8$, $uv = -105$.

Do đó, u và v là nghiệm của phương trình: $x^2 + 8x - 105 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 = -15 \\ x_2 = 7 \end{bmatrix}$

Vậy, ta có hai cặp nghiệm $u = -15$ và $v = 7$ hoặc $u = 7$ và $v = -15$.

c. Ta có: $u + v = 2$, $uv = 9$.

Do đó, u và v là nghiệm của phương trình: $x^2 - 2x + 9 = 0$ (vô nghiệm)

Vậy, không tồn tại cặp u, v nào thoả mãn điều kiện trên.

Ví dụ 2: *Tìm các cạnh của hình chữ nhật, biết chu vi bằng* 30m *và diện tích bằng* $54m^2$.

✍ *Giải*

Gọi độ dài hai cạnh của hình chữ nhật là u và v, điều kiện $u, v > 0$.

Với giả thiết:

- Hình chữ nhật có chu vi bằng 30m, ta được:
$$2(u + v) = 30 \Leftrightarrow u + v = 15. \quad (1)$$
- Hình chữ nhật có diện tích bằng $54m^2$, ta được: $uv = 54$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u + v = 15 \\ u.v = 54 \end{cases}$

tức là, u và v là nghiệm của phương trình bậc hai:

$$x^2 - 15x + 54 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 6 \text{ và } x_2 = 9.$$

Vậy, hình chữ nhật có hai cạnh là 6m và 9m:

☞ ***Nhận xét***:

1. Trong lời giải trên, với hai nghiệm $x_1 = 6$ và $x_2 = 9$ chúng ta có thể gán u cho x_1 còn v cho x_2 hoặc ngược lại chỉ có điều cả hai cách gán này đều cho đáp số về một hình chữ nhật. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp với mỗi phép gán như vậy chúng ta sẽ nhận được một nghiệm (ví dụ (u, v) là toạ độ của một điểm) của hệ phương trình.
2. Như vậy, điểm cốt yếu của ứng dụng này là chuyển việc " *Giải một hệ phương trình* " thành việc " *Giải một phương trình* ".

Ví dụ 3: *Giải các hệ phương trình sau*:

a. $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 1 \end{cases}$.

✍ *Giải*

a. Từ hệ phương trình, suy ra x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \overset{a-b+c=0}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} t_1 = -1 \\ t_2 = 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 \text{ và } y = 3 \\ x = 3 \text{ và } y = -1 \end{bmatrix}.$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm (−1, 3) và (3, −1).

b. Từ hệ phương trình, suy ra x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t_1 = 2 - \sqrt{3} \\ t_2 = 2 + \sqrt{3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 2 - \sqrt{3} \text{ và } y = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 + \sqrt{3} \text{ và } y = 2 - \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm:

$(2 - \sqrt{3}\,;\, 2 + \sqrt{3})$ và $(2 + \sqrt{3}\,;\, 2 - \sqrt{3})$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong ví dụ trên:

1. Ở câu a), chỉ mang tính minh hoạ cho phương pháp chuyển đổi từ *hệ phương trình* thành *phương trình*. Bởi vì, chúng ta thấy ngay phép chuyển đổi này không hiệu quả khi mà có thể nhẩm được nghiệm ngay từ hệ đó, cụ thể: $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 3.(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 3 \text{ và } y = -1 \\ x = -1 \text{ và } y = 3 \end{bmatrix}.$
2. Ở câu b), vì hệ không thể nhẩm được nghiệm nên việc chuyển đổi là hoàn toàn phù hợp.

Ví dụ 4: *Giải hệ phương trình*: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ xy = -4 \end{cases}$.

✍ *Giải*

Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ về dạng:

$$(x + y)^2 - 2xy = 12 \overset{xy=-4}{\Leftrightarrow} (x + y)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + y = 2 \\ x + y = -2 \end{bmatrix}.$$

Khi đó:

- Với x + y = 2, ta nhận được hệ: $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -4 \end{cases}$

  suy ra x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t_1 = 1 - \sqrt{5} \\ t_2 = 1 + \sqrt{5} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 - \sqrt{5} \text{ và } y = 1 + \sqrt{5} \\ x = 1 + \sqrt{5} \text{ và } y = 1 - \sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

- Với x + y = −2, ta nhận được hệ: $\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -4 \end{cases}$

suy ra x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2+2t-4=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t_1=-1-\sqrt{5} \\ t_2=-1+\sqrt{5} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-1-\sqrt{5}\ \&\ y=-1+\sqrt{5} \\ x=-1+\sqrt{5}\ \&\ y=-1-\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Vậy, hệ phương trình có bốn cặp nghiệm:

$(1-\sqrt{5}\,;\,1+\sqrt{5})$, $(1+\sqrt{5}\,;\,1-\sqrt{5})$,
$(-1-\sqrt{5}\,;\,-1+\sqrt{5})$ và $(-1+\sqrt{5}\,;\,-1-\sqrt{5})$.

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, trong ví dụ trên, chúng ta cần sử dụng phép biến đổi hằng đẳng thức sau đó dùng phép thế để nhận được hệ phương trình cơ bản.

Ngoài ra, trong nhiều trường hợp chúng ta còn cần sử dụng tới ẩn phụ. Ví dụ sau sẽ minh hoạ điều này.

Ví dụ 5: *Giải hệ phương trình*: $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4 \\ xy=27 \end{cases}$.

✍ *Giải*

Đặt: $\begin{cases} u=\sqrt[3]{x} \\ v=\sqrt[3]{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3=x \\ v^3=y \end{cases}$. Khi đó, hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} u+v=4 \\ u^3.v^3=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ (uv)^3=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv=3 \end{cases}$$

suy ra u, v là nghiệm của phương trình

$$t^2-4t+3=0 \overset{a-b+c=0}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} t_1=1 \\ t_2=3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u=1 \text{ và } v=3 \\ u=3 \text{ và } v=1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt[3]{x}=1 \text{ và } \sqrt[3]{y}=3 \\ \sqrt[3]{x}=3 \text{ và } \sqrt[3]{y}=1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=1 \text{ và } y=27 \\ x=27 \text{ và } y=1 \end{bmatrix}$$

Vậy, nghiệm của hệ đã cho là (1; 27) và (27; 1).

☛ ***Nhận xét***:

1. Trong ví dụ trên bằng việc sử dụng hai ẩn phụ chúng ta đã chuyển được một hệ vô tỉ về dạng chuẩn để có thể chuyển nó về một phương trình bậc hai.

   Tuy nhiên, cho dù lời giải này là tường minh nhưng chúng ta có thể thực hiện gọn hơn mà không cần sử dụng tới ẩn phụ, cụ thể:

   Xét phương trình thứ nhất của hệ:

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})^3=4^3 \Leftrightarrow x+y+3\sqrt[3]{xy}\,(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})=64$$

$$\Leftrightarrow x+y=28.$$

Vậy, hệ có dạng: $\begin{cases} x + y = 28 \\ xy = 27 \end{cases}$

suy ra x, y là nghiệm của phương trình: $t^2 - 28t + 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 27 \end{array}\right.$.

Vậy, nghiệm của hệ đã cho là (1, 27) và (27, 1).

2. Như vậy, bằng việc sử dụng hệ thức Viét chúng ta đã biết cách chuyển một hệ phương trình thành một phương trình bậc hai để giải. Tuy nhiên, đó vẫn chỉ là phép biến đổi một bước, chúng ta hãy thử quan tâm tới sơ đồ biến đổi sau:

Phương trình $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình $\Leftrightarrow$ Phương trình

Ví dụ sau sẽ minh hoạ điều này.

Ví dụ 6: *Giải phương trình:* $\sqrt{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}} + \sqrt{\sqrt{x+9} + \sqrt{x}} = 4.$

Giải

Điều kiện $x \geq 0$.

Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}} \\ v = \sqrt{\sqrt{x+9} + \sqrt{x}} \end{cases} \Rightarrow 0 < u \leq v$ và $uv = \sqrt{x+9-x} = 3.$

Khi đó, phương trình được chuyển thành hệ: $\begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 3 \end{cases}$

Suy ra u, v là nghiệm của phương trình

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \overset{a-b+c=0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}} = 1 \\ \sqrt{\sqrt{x+9} + \sqrt{x}} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+9} - \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x+9} + \sqrt{x} = 9 \end{cases} \Rightarrow -2\sqrt{x} = -8 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16.$$

Vậy, phương trình có nghiệm x =16.

☞ ***Chú ý***: Cuối cùng, trong ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ trình bày một ví dụ về hệ có chứa tham số.

Ví dụ 7: *Cho hệ phương trình:* $\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y = 6 \end{cases}$.

a. *Giải hệ phương trình với* m = 26.
b. *Xác định* m *để hệ vô nghiệm.*
c. *Xác định* m *để hệ có nghiệm duy nhất, xác định nghiệm đó.*
d. *Xác định* m *để hệ có hai nghiệm phân biệt.*

Giải

Biến đổi hệ phương trình về dạng: $\begin{cases}(x+y)^2-2xy=m\\x+y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=6\\xy=\dfrac{36-m}{2}\end{cases}$

khi đó, x, y là nghiệm của phương trình: $t^2-6t+\dfrac{36-m}{2}=0.$ (1)

a. Với m = 26, phương trình (1) có dạng:

$$2t^2-12t+10=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}t_1=1\\t_2=5\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x=1 \text{ và } y=5\\x=5 \text{ và } y=1\end{bmatrix}.$$

Vậy, với m = 26 hệ phương trình có hai cặp nghiệm (1, 5) và (5, 1).

b. Hệ vô nghiệm

$\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_{(1)}<0 \Leftrightarrow m-18<0 \Leftrightarrow m<18.$

Vậy, với m < 18 hệ phương trình vô nghiệm.

c. Hệ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow \Delta'_{(1)}=0 \Leftrightarrow m-18=0 \Leftrightarrow m=18.$

Khi đó, hệ có nghiệm x = y = 3.

Vậy, với m = 18 hệ phương trình có nghiệm duy nhất x = y = 3.

d. Hệ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'_{(1)}>0 \Leftrightarrow m-18>0 \Leftrightarrow m>18.$

Vậy, với m > 18 hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

<u>Vấn đề 3:</u> TÌM GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC ĐỐI XỨNG GIỮA CÁC NGHIỆM

Phương pháp

Biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1 và x_2 của phương trình

$$ax^2+bx+c=0$$

là biểu thức có giá trị không thay đổi khi ta hoán vị x_1 và x_2.

Ta có thể biểu thị được các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1 và x_2 theo S và P, ví dụ:

a. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=S^2-2P.$

b. $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=S^3-3SP.$

c. $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{S}{P}.$

d. $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}=\dfrac{S^2-2P}{P^2}.$

Ví dụ 1: *Cho phương trình:* $\sqrt{3}x^2 - 15x + 3 = 0$.

a. *Chứng tỏ rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt* x_1 *và* x_2.

b. *Tính giá trị của biểu thức* $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Giải

a. Nhận xét rằng: $\Delta = 15^2 - 4.\sqrt{3}.3 = 225 - 12\sqrt{3} > 0$
do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b. Hai nghiệm x_1 và x_2 của phương trình thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3} \\ x_1.x_2 = 12 = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \end{cases}$.

Ta có: $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 5.$

Nhận xét: Như vậy, với yêu cầu trong câu b) của ví dụ trên nếu chúng ta đi tính cụ thể các x_1 và x_2 rồi thay vào biểu thức A thì sẽ phải thực hiện việc đơn giản biểu thức chứa căn rất phức tạp. Trong khi, sử dụng hệ thức Viét chúng ta đã có được một lời giải rất gọn

Ví dụ 2: *Giả sử phương trình:* $ax^2 + bx + c = 0$
có hai nghiệm x_1, x_2. *Hãy lập phương trình có nghiệm như sau:*

a. $-x_1$ và $-x_2$.

b. x_1^2 và x_2^2.

c. $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$.

Giải

Phương trình có hai nghiệm x_1, x_2, suy ra: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$.

a. Ta có: $\begin{cases} (-x_1) + (-x_2) = -S \\ (-x_1).(-x_2) = P \end{cases}$

suy ra $-x_1$ và $-x_2$ là nghiệm của phương trình: $t^2 + St + P = 0$.

b. Ta có: $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P \\ x_1^2.x_2^2 = P^2 \end{cases}$

suy ra x_1^2 và x_2^2 là nghiệm của phương trình: $t^2 - (S^2 - 2P)t + P^2 = 0$.

c. Ta có: $\begin{cases} \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{S}{P} \\ \dfrac{1}{x_1}.\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{P} \end{cases}$

suy ra $\dfrac{1}{x_1}$ và $\dfrac{1}{x_2}$ là nghiệm của phương trình: $t^2-\dfrac{S}{P}t+\dfrac{1}{P}=0.$

Vấn đề 4: TÌM HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA CÁC NGHIỆM KHÔNG PHỤ THUỘC THAM SỐ

Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases}.$$

Bước 2: Áp dụng hệ thức Viét, ta được: $\begin{cases} x_1+x_2=f(m) \\ x_1.x_2=g(m) \end{cases}$ (I)

Bước 3: Khử m từ hệ (I) ta được hệ thức cần tìm.

Ví dụ 1: *Cho phương trình:* $x^2-2mx+2m-2=0.$

a. *Tìm* m *để phương trình có hai nghiệm* x_1 *và* x_2.

b. *Tìm hệ thức liên hệ giữa* x_1 *và* x_2 *không phụ thuộc vào* m.

Giải

a. Nhận xét rằng: $\Delta' = m^2-2m+2=(m-1)^2+1>0$

do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b. Hai nghiệm x_1 và x_2 của phương trình thoả mãn: $\begin{cases} x_1+x_2=2m \\ x_1.x_2=2m-2 \end{cases}.$

Từ hệ trên, bằng cách thay 2m ở phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai, ta được: $x_1.x_2=x_1+x_2-2 \Leftrightarrow x_1+x_2-x_1.x_2=2.$

Đó chính là hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m.

Nhận xét: Như vậy, với yêu cầu trong câu b) của ví dụ trên nếu chúng ta đi tính cụ thể các x_1 và x_2 rồi thực hiện các phép thử để tìm ra được một hệ thức liên hệ giữa các nghiệm không phụ thuộc vào m thì sẽ phải thực hiện khá nhiều lần và quan trọng hơn cả là không có được định hướng chính xác. Trong khi, sử dụng hệ thức Viét chúng ta đã có được một lời giải rất gọn.

Ví dụ 2: *Cho phương trình:* $x^2-2mx-m^2=0.$

Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc m.

✍ *Giải*

Nhận xét rằng: $\Delta' = m^2 + m^2 = 2m^2 \geq 0$

do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

Hai nghiệm x_1 và x_2 của phương trình thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = -m^2 \end{cases}$.

Từ hệ trên, bằng cách rút m từ phương trình thứ nhất rồi thay vào phương trình thứ hai, ta được: $x_1.x_2 = -\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 4x_1.x_2 = 0.$

Đó chính là hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m.

☞ ***Chú ý***: Trong dạng toán trên việc tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 là bắt buộc phải có. Và để tránh cho các em học sinh mắc phải thiếu sót này, thường thì bài toán đưa ra câu hỏi tìm điều kiện trước.

Ví dụ 3: *Cho phương trình*: $(m-1)x^2 - 2(m-4)x + m - 5 = 0.$

a. *Xác định* m *để phương trình có hai nghiệm.*

b. *Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc* m.

✍ *Giải*

a. Để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2, điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ 2m - 11 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \neq m \leq \frac{11}{2}. \qquad (*)$$

Khi đó, phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-4)}{m-1} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m-5}{m-1} \end{cases}. \qquad (I)$$

Khử m từ hệ (I) ta được: $2(x_1 + x_2) - 3x_1x_2 = 1$, đó chính là hệ thức cần tìm.

☞ ***Chú ý***: Trong nhiều trường hợp, việc khử tham số từ hệ (I) cần sử dụng các hằng đẳng thức, đặc biệt là các hằng đẳng lượng giác, cụ thể:

a. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

b. $\tan\alpha.\cot\alpha = 1.$

Ví dụ 4: *Cho phương trình*: $x^2 - 2x\sin\alpha + \cos\alpha - 1 = 0.$

a. *Chứng minh rằng với mọi* α *phương trình luôn có nghiệm.*

b. *Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm mà không phụ thuộc vào* α.

Giải

a. Ta có: $\Delta' = \sin^2\alpha - \cos\alpha + 1 = \sin^2\alpha + (1 - \cos\alpha) \geq 0, \forall\alpha$.

Vậy, với mọi α phương trình luôn có hai nghiệm x_1 và x_2.

b. Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2\sin\alpha \\ x_1.x_2 = \cos\alpha - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ \cos\alpha = x_1.x_2 + 1 \end{cases}$

$$\overset{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}{\Rightarrow} \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + (x_1x_2 + 1)^2 = 1$$

đó chính là hệ thức cần tìm.

Ví dụ 5: *Cho phương trình:* $x^2 - 2x\tan\alpha - 1 - \cot^2\alpha = 0$.

Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc α.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \sin\alpha \neq 0 \\ \cos\alpha \neq 0 \end{cases}$.

Trước hết ta cần đi tìm α để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 là:

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \tan^2\alpha + 1 + \cot^2\alpha \geq 0$, luôn đúng.

Suy ra, phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2\tan\alpha \\ x_1.x_2 = -1 - \cot^2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ \cot^2\alpha = -1 - x_1.x_2 \end{cases}$$

$$\overset{\tan\alpha.\cot\alpha=1}{\Rightarrow} \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2.(-1 - x_1x_2) = 1$$

đó chính là hệ thức cần tìm.

Ví dụ 6: *Cho phương trình:* $(1 + m^2)x^2 - 2mx + 1 - m^2 = 0$.

a. *Chứng minh rằng với mọi* $m > 1$ *phương trình luôn có nghiệm.*

b. *Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm mà không phụ thuộc vào* m.

Giải

a. Ta có: $\Delta' = m^2 - (1 + m^2)(1 - m^2) = m^4 + m^2 - 1 > 0, \forall m > 1$.

Suy ra, với mọi $m > 1$ phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m}{1+m^2} \\ x_1.x_2 = \dfrac{1-m^2}{1+m^2} \end{cases} \quad (I)$$

b. Khử m từ hệ (I) bằng nhận xét:

$$(x_1 + x_2)^2 + (x_1x_2)^2 = \left(\frac{2m}{1+m^2}\right)^2 + \left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + (x_1x_2)^2 = 1.$$

đó chính là hệ thức cần tìm.

Vấn đề 5: XÉT DẤU CÁC NGHIỆM

Phương pháp

Dùng hệ thức Viét ta có thể xét dấu được các nghiệm x_1 và x_2 của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$ dựa trên kết quả:

1. Phương trình có hai nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P = \frac{c}{a} < 0$.
2. Phương trình có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$.
3. Phương trình có hai nghiệm dương $0 < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$.
4. Phương trình có hai nghiệm âm $x_1 \leq x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$.

Ví dụ 1: *Cho phương trình*: $x^2 - 2x + m^2 + 5 = 0$.

Chứng tỏ rằng nếu phương trình có hai nghiệm thì hai nghiệm đó đều dương.

✍ *Giải*

Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2, khi đó:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 > 0 \\ x_1.x_2 = m^2 + 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow x_1, x_2 > 0, \text{ đpcm.}$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên chúng ta đã đánh giá được phương trình có hai nghiệm dương, dựa trên:

$x_1.x_2 > 0 \Rightarrow x_1$ và x_2 cùng dấu.

$x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow x_1$ và x_2 cùng dấu dương.

Ví dụ 2: *Cho phương trình*: $x^2 - 2x + m = 0$.

Tìm m *để phương trình có hai nghiệm. Khi đó, tuỳ theo* m *hãy chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình.*

Giải

Để phương trình có hai nghiệm, điều kiện là:

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1.$

Khi đó, hai nghiệm x_1 và x_2, thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 > 0 \\ x_1.x_2 = m \end{cases}$.

Để chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình, ta xét:

- Nếu $0 < m \leq 1$, phương trình có hai nghiệm dương.
- Nếu $m = 0$, phương trình có hai $x_1 = 0$ và $x_2 = 2$.
- Nếu $m < 0$, phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm dương có giá trị lớn hơn giá trị tuyệt đối của nghiệm âm.

Ví dụ 3: *Cho phương trình:* $x^2 - 2(m + 1)x - m + 1 = 0.$

Xác định m *để phương trình:*

a. *Có hai nghiệm trái dấu.*

b. *Có hai nghiệm dương phân biệt.*

Giải

a. Phương trình có hai nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2$

$\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow -m + 1 < 0 \Leftrightarrow m > 1.$

Vậy, với $m > 1$ phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $0 < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m > 0 \\ 1 - m > 0 \\ 2(m + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Vậy, với $0 < m < 1$ phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

Ví dụ 4: *Cho phương trình:* $(m - 1)x^2 + 2(m + 2)x + m - 1 = 0.$ (1)

Xác định m *để phương trình:*

a. *Có một nghiệm.*

b. *Có hai nghiệm cùng dấu.*

Giải

a. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $m - 1 = 0$ (tức $m = 1$) phương trình có dạng:

$6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, là nghiệm duy nhất của phương trình.

Trường hợp 2: Với $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Khi đó, để phương trình có một nghiệm, điều kiện là:

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow (m + 2)^2 - (m - 1)(m - 1) = 0 \Leftrightarrow 6m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Vậy, với $m = 1$ hoặc $m = -\frac{1}{2}$ phương trình có một nghiệm.

b. Để phương trình có hai nghiệm cùng dấu, điều kiện là:

$$\begin{cases}\Delta' \geq 0\\ P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6m+3 \geq 0\\ \dfrac{m-1}{m-1} > 0\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \neq 1.$$

Vậy, với $-\frac{1}{2} \leq m \neq 1$ phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

Ví dụ 5: *Cho phương trình*: $mx^2 - 2(3-m)x + m - 4 = 0.$ (1)

Xác định m *để phương trình*:

a. *Có hai nghiệm đối nhau.*

b. *Có đúng một nghiệm âm.*

Giải

a. Phương trình có hai nghiệm đối nhau khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}P < 0\\ S = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{m-4}{m} < 0\\ \dfrac{3-m}{m} = 0\end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy, với m = 3 phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với m = 0.

Khi đó, phương trình có dạng: $-6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$, thoả mãn.

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$.

Khi đó, để phương trình có đúng một nghiệm âm, điều kiện là:

$$\begin{bmatrix}x_1 < 0 \leq x_2\\ x_1 = x_2 < 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x_1 < 0 = x_2\\ x_1 < 0 < x_2\\ x_1 = x_2 < 0\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\begin{cases}f(0) = 0\\ S < 0\end{cases}\\ P < 0\\ \begin{cases}\Delta = 0\\ -b/2a < 0\end{cases}\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\begin{cases}m-4 = 0\\ \dfrac{2(3-m)}{m} < 0\end{cases}\\ \dfrac{m-4}{m} < 0\\ \begin{cases}-2m+9 = 0\\ \dfrac{3-m}{m} < 0\end{cases}\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}m = 4\\ 0 < m < 4\\ m = \dfrac{9}{2}\end{bmatrix}.$$

Vậy, với $m \in (0, 4] \cup \{\frac{9}{2}\}$ phương trình có đúng một nghiệm âm.

Vấn đề 6: TÌM GIÁ TRỊ CỦA THAM SỐ ĐỂ CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH THOẢ MÃN MỘT ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases}.$$

Bước 2: Áp dụng hệ thức Viét, ta được: $\begin{cases} x_1 + x_2 = f(m) \\ x_1.x_2 = g(m) \end{cases}$. (I)

Bước 3: Biểu diễn điều kiện K thông qua (I).

Bước 4: Kết luận.

☞ ***Chú ý:*** Trong một vài trường hợp, bài toán còn được phát biểu dưới dạng "*Chứng minh rằng các nghiệm của phương trình thoả mãn hệ thức cho trước*".

Ví dụ 1: (Bài 62/tr 64 – Sgk): *Cho phương trình*: $7x^2 + 2(m-1)x - m^2 = 0$.

a. *Với giá trị nào của* m *thì phương trình có nghiệm*?

b. *Trong trường hợp phương trình có nghiệm, dùng hệ thức Viét, hãy tính tổng các bình phương hai nghiệm của phương trình đó theo* m.

✍ *Giải*

a. Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + 7m^2 \geq 0, \forall m$

Vậy, với mọi giá trị của m phương trình luôn có nghiệm.

b. Gọi x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình, ta có:

$$x_1 + x_2 = \frac{-2(m-1)}{7} = \frac{2(1-m)}{7} \text{ và } x_1.x_2 = \frac{-m^2}{7}.$$

Ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 = \frac{4(1-m)^2}{49} - 2.\left(\frac{-m^2}{7}\right) = \frac{18m^2 - 8m + 4}{49}.$$

Ví dụ 2: *Cho phương trình*: $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$.

Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 *thoả mãn*:

$$4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2.$$

Giải

Để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2, điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ 3-m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \neq m \leq 3. \qquad (*)$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m+1} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m-2}{m+1} \end{cases}$.

Suy ra: $4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2 \Leftrightarrow 4.\dfrac{2(m-1)}{m+1} = 7.\dfrac{m-2}{m+1} \Leftrightarrow m = -6$ thoả mãn (*).

Vậy, với $m = -6$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 3: *Xác định* m *để phương trình*: $mx^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0$ *có hai nghiệm* x_1 *và* x_2 *thoả mãn* $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

Giải

Trước hết, điều kiện phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \neq 0. \qquad (*)$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m+1)}{m} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m+1}{m} \end{cases}$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2 \Leftrightarrow \dfrac{4(m+1)^2}{m^2} - \dfrac{2(m+1)}{m} = 2 \Leftrightarrow m = -\dfrac{2}{3}$.

Vậy, với $m = -\dfrac{2}{3}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 4: *Cho phương trình*: $x^2 - 2kx - (k-1)(k-3) = 0$.
Chứng minh rằng với mọi k, *phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt* x_1, x_2 *thoả mãn* $\dfrac{1}{4}(x_1+x_2)^2 + x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 3 = 0$.

Giải

Ta có: $\Delta' = k^2 + (k-1)(k-3) = 2k^2 - 4k + 4 = 2(k-1)^2 + 2 > 0, \forall k$
suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2k \\ x_1.x_2 = -(k-1)(k-3) \end{cases}.$$

Khi đó: $\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2+x_1x_2-2(x_1+x_2)+3$

$=\frac{1}{4}(2k)^2-(k-1)(k-3)-2.2k+3=0$, đpcm.

Ví dụ 5: *Giả sử phương trình:* $ax^2+bx+c=0$ *có hai nghiệm* x_1, x_2. *Chứng minh rằng hệ thức* $b^3+a^2c+ac^2=3abc$ *là điều kiện cần và đủ để phương trình có một nghiệm bằng bình phương của nghiệm còn lại.*

Giải

Theo giả thiết ta được: $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ P=x_1.x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$. (I)

Xét biểu thức:

$$P=(x_1-x_2^2)(x_2-x_1^2)=x_1x_2+x_1^2x_2^2-(x_1^3+x_2^3)$$

$$=x_1x_2+x_1^2x_2^2-[(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)]$$

$$=\frac{c}{a}+\frac{c^2}{a^2}-\left[-\frac{b^3}{a^3}+3\frac{c}{a}.\frac{b}{a}\right]=\frac{b^3+a^2c+ac^2-3abc}{a^3}$$

$$\Leftrightarrow P=0\Leftrightarrow(x_1-x_2^2)(x_2-x_1^2)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix} x_1-x_2^2=0 \\ x_2-x_1^2=0 \end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix} x_1=x_2^2 \\ x_2=x_1^2 \end{bmatrix}$$, đpcm.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Trình bày cách nhẩm nghiệm cho các phương trình sau:

a. $x^2-10x+16=0$.
b. $x^2+9x+18=0$.
c. $x^2-8x+65=0$.
d. $x^2+9x-22=0$.

Bài 2: Trình bày cách nhẩm nghiệm cho các phương trình sau:

a. $-x^2-23x-132=0$.
b. $3x^2+9x-162=0$.
c. $\frac{1}{14}x^2+\frac{10}{7}x+6=0$.

Bài 3: Tìm hai cạnh của hình chữ nhật biết chu vi bằng 24m và diện tích bằng $27m^2$.

Bài 4: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} x+y=20 \\ xy=99 \end{cases}$.
b. $\begin{cases} x+y=-21 \\ xy=54 \end{cases}$.

Bài 5: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=-\dfrac{9}{4} \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 3(x+y)=2 \\ xy=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Bài 6: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} x+y=4 \\ (x^2+y^2)(x^3+y^3)=280 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=1 \\ x-y-xy=3 \end{cases}$.

Bài 7: Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \\ x^2+y^2=128 \end{cases}$.

c. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1 \\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78 \end{cases}$.

Bài 8: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+xy+y=m+2 \\ x^2y+xy^2=m+1 \end{cases}$.

a. Giải hệ phương trình với $m=-3$.

b. Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 9: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+m) \\ (x+y)^2=4 \end{cases}$

a. Giải hệ phương trình với $m=1$.

b. Xác định m để hệ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Bài 10: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+xy=m+1 \\ x^2y+xy^2=3m-5 \end{cases}$.

a. Giải hệ phương trình với $m=\dfrac{5}{2}$.

b. Xác định m để hệ vô nghiệm.

c. Xác định m để hệ có một nghiệm duy nhất.

d. Xác định m để hệ có hai nghiệm phân biệt.

Bài 11: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+x^2+y^2=8 \\ xy(x+1)(y+1)=m \end{cases}$.

a. Giải hệ phương trình với $m=12$.

b. Xác định m để hệ có nghiệm.

Bài 12: Cho phương trình: $\sqrt{2}\,x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 4 = 0$

a. Chứng tỏ rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Bài 13: Cho phương trình: $\sqrt{2}\,x^2 - 2\sqrt{6}\,x - 8 = 0$

a. Chứng tỏ rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$.

Bài 14: Tìm m để phương trình: $x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 2 = 0$
có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó hãy lập phương trình có nghiệm như sau:

a. $-2x_1$ và $-2x_2$.

b. $3x_1$ và $3x_2$.

c. $-x_1^2$ và $-x_2^2$.

d. $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$.

e. $x_1 + x_2$ và $-x_1.x_2$.

Bài 15: Tìm m để phương trình: $mx^2 - 2(m + 3)x + m + 1 = 0$
có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó hãy lập phương trình có nghiệm như sau:

a. $-x_1$ và $-x_2$.

b. $2x_1$ và $2x_2$.

c. x_1^3 và x_2^3.

d. $\frac{1}{x_1^4}$ và $\frac{1}{x_2^4}$.

e. $x_1^2 + x_2^2$ và $x_1^2\,x_2^2$.

Bài 16: Tìm m để phương trình: $mx^2 - 2(m + 1)x + 2 = 0$
có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó hãy lập phương trình có nghiệm như sau:

a. $-3x_1$ và $-3x_2$.

b. x_1+x_2 và x_1x_2.

c. x_1^2 và x_2^2.

d. $x_1^2 + x_2^2$ và $x_1^2\,x_2^2$.

Bài 17: Cho phương trình $mx^2 - 2mx + 3 = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc m.

Bài 18: Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x - m + 1 = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1 và x_2 của phương trình mà không phụ thuộc vào m.

Bài 19: Cho phương trình: $x^2 - 2x\cos\alpha + \sin\alpha - 1 = 0$.

a. Chứng minh rằng với mọi α phương trình luôn có nghiệm.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm mà không phụ thuộc vào α.

Bài 20: Cho phương trình: $x^2 - 2x\cot\alpha - 1 - \tan^2\alpha = 0$.

Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm của phương trình không phụ thuộc α.

Bài 21: Cho phương trình: $(1 + m^2)x^2 - 2(m^2 - 1)x + m = 0$.

a. Tìm m để phương trình luôn có nghiệm.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm mà không phụ thuộc vào m.

Bài 22: Cho phương trình:

$$x^2 + 2x + m = 0.$$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm. Khi đó, tuỳ theo m hãy chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình.

Bài 23: Cho phương trình: $x^2 - 4mx + 1 = 0$.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm. Khi đó, tuỳ theo m hãy chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình.

Bài 24: Cho phương trình: $mx^2 - 6x + m = 0$.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm. Khi đó, tuỳ theo m hãy chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình.

Bài 25: Cho phương trình: $mx^2 - 8x + 1 = 0$.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm. Khi đó, tuỳ theo m hãy chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình.

Bài 26: Cho phương trình: $x^2 - 2(m + 7)x + m^2 - 4 = 0$.

Xác định m để phương trình:

a. Có hai nghiệm trái dấu.

b. Có hai nghiệm cùng dấu.

Bài 27: Cho phương trình: $(m - 1)x^2 + 2(m + 2)x + m - 1 = 0$.

Xác định m để phương trình:

a. Có hai nghiệm âm phân biệt.

b. Có hai nghiệm dương phân biệt.

Bài 28: Cho phương trình: $(m - 1)x^2 + 2mx + m + 1 = 0$.

Xác định m để phương trình:

a. Có hai nghiệm âm phân biệt.

b. Có hai nghiệm đối nhau.

Bài 29: Giả sử phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$
có đúng một nghiệm dương, gọi nghiệm đó là x_1. Chứng minh rằng:

a. Phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ cũng có đúng một nghiệm dương, gọi nghiệm đó là x_2.

b. $x_1 + x_2 \geq 2$.

Bài 30: Tìm m để phương trình: $x^2 + 2mx + 4 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó:

a. Tính theo m giá trị các biểu thức $E = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ và $F = \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$.

b. Tìm m sao cho $x_1^4 + x_2^4 = 32$.

c. Tìm m sao cho $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = 47$.

Bài 31: Giả sử phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Chứng minh rằng hệ thức: $(k + 1)^2ac - kb^2 = 0$, với $k \neq 0$ là điều kiện cần và đủ để phương trình có một nghiệm bằng k lần nghiệm còn lại.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 3: 3m và 9m.

Bài 4: a. (9, 11) và (11, 9).

b. (–3, –18) và (–18, –3).

Bài 5:

a. Từ hệ phương trình, suy ra x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 4t - \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -\frac{1}{2} \\ t_2 = \frac{9}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \,\&\, y = \frac{9}{2} \\ x = \frac{9}{2} \,\&\, y = -\frac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm $(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$ và $(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2})$.

b. Biến đổi hệ phương trình về dạng: $\begin{cases} x + y = \frac{2}{3} \\ xy = -\frac{1}{3} \end{cases}$

suy ra x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \,\&\, y = -\frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{3} \,\&\, y = 1 \end{array}\right. .$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm $(1, -\frac{1}{3})$ và $(-\frac{1}{3}, 1)$.

Bài 6:

a. Ký hiệu hệ: $\begin{cases} x + y = 4 & (1) \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280 & (2) \end{cases}$

Biến đổi phương trình (2) về dạng:

$$280 = [(x + y)^2 - 2xy][(x + y)^3 - 3xy(x + y)] = (16 - 2xy)(64 - 12xy)$$

$$\Leftrightarrow 3(xy)^2 - 40xy + 93 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = 3 \\ xy = 31/3 \end{array}\right. .$$

- Với xy = 3, hệ có dạng: $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$

  suy ra, thì x, y là nghiệm phương trình:

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 1 \\ t = 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \ \& \ y = 3 \\ x = 3 \ \& \ y = 1 \end{bmatrix}$$

- Với $xy = \frac{31}{3}$, hệ có dạng: $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 31/3 \end{cases}$

  suy ra, thì x, y là nghiệm phương trình: $t^2 - 4t + \frac{31}{3} = 0$, vô nghiệm.

Vậy, hệ có hai cặp nghiệm (1, 3) và (3, 1).

b. Đặt t = –y, ta được: $\begin{cases} x^2 - tx + t^2 = 1 \\ x + t + xt = 3 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} x + t = S \\ xt = P \end{cases}$, điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$, ta được:

$$\begin{cases} S^2 - 3P = 1 \\ S + P = 3 \end{cases} \Rightarrow S^2 + 3S - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} S = -5 \\ S = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} S = -5 \\ P = 8 \end{cases} (l) \\ \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + t = 2 \\ xt = 1 \end{cases}$$

khi đó x, t là nghiệm của phương trình:

$z^2 - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \Rightarrow x = t = 1 \Leftrightarrow x = 1 \ \& \ y = -1.$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm duy nhất (1, –1).

Bài 7:

a. Điều kiện x, y ≥ 0. (1)

Đặt: $\begin{cases} S = \sqrt{x} + \sqrt{y} \\ P = \sqrt{xy} \end{cases}$, điều kiện S, P ≥ 0 và $S^2 - 4P \geq 0$.

Khi đó, hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{[(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 2\sqrt{xy}]^2 - 2xy} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(S^2 - 2P)^2 - 2P^2} + \sqrt{2}P = 8\sqrt{2} \\ S = 4 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{P^2 - 32P + 128} = 8 - P \Leftrightarrow P = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 4 \\ P = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ \sqrt{xy} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} = 2 \Leftrightarrow x = y = 4.$$

Vậy, hệ có nghiệm x = y = 4.

b. Điều kiện: $\begin{cases} x+y \ge 0 \\ x-y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -x \\ y \le x \end{cases} \Leftrightarrow -x \le y \le x$ suy ra $x \ge 0$.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \\ \frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(x-y)^2=128 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \\ (x+y)^2+(x-y)^2=256 \end{cases}.$$

Đặt: $\begin{cases} u=\sqrt{x+y} \\ v=\sqrt{x-y} \end{cases}$, với $u, v \ge 0$.

Ta được :

$$\begin{cases} u+v=4 \\ u^4+v^4=256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv(uv-32)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ \left[\begin{array}{l} uv=0 \\ uv=32 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv=32 \end{cases} \text{ (I)} \qquad \text{hoặc} \qquad \begin{cases} u+v=4 \\ uv=0 \end{cases} \text{ (II)}$$

- Giải (I): ta thấy u, v là nghiệm của phương trình: $t^2 - 4t + 32 = 0$, vô nghiệm.
- Giải (II):

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=4 \ \& \ v=0 \\ u=0 \ \& \ v=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+y}=4 \\ \sqrt{x-y}=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+y}=0 \\ \sqrt{x-y}=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=8 \\ x=8 \ \& \ y=-8 \end{array}\right.$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm (8, 8) và (8, –8).

c. Điều kiện $x, y > 0$.

Viết lại hệ dưới dạng: $\begin{cases} (x+y)+(-\sqrt{xy})=7 \\ (x+y).(-\sqrt{xy})=-78 \end{cases}$

suy ra $x + y$ và $-\sqrt{xy}$ là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 7t - 78 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=13 \\ t_2=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=13 \\ -\sqrt{xy}=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=13 \\ xy=36 \end{array}\right.$$

suy ra x, y là nghiệm của phương trình:

$$u^2 - 13u + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1=4 \\ u_2=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=4 \ \& \ y_1=9 \\ x_2=9 \ \& \ y_2=4 \end{array}\right.$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm (4, 9), (9, 4).

Bài 8: Đặt: $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$, điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$.

Viết lại hệ dưới dạng: $\begin{cases} (x + y) + xy = m + 2 \\ (x + y).xy = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S + P = m + 2 \\ S.P = m + 1 \end{cases}$

khi đó S, P là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - (m + 2)t + m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = m + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x, y \text{ là nghiệm của } f(u)=u^2-u+m+1=0. \quad (1) \\ \begin{cases} x + y = m + 1 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x, y \text{ là nghiệm của } g(u)=u^2-(m+1)u+1=0. \quad (2) \end{cases}$$

a. Với $m = -3$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow u^2 - u - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ u = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \ \& \ y = 2 \\ x = 2 \ \& \ y = -1 \end{cases}.$$

$$(2) \Leftrightarrow u^2 + 2u + 1 = 0 \Leftrightarrow u = -1 \Leftrightarrow x = y = -1.$$

Vậy, với $m = 3$ hệ phương trình có 3 cặp nghiệm $(-1, 2)$, $(2, -1)$ và $(-1, -1)$.

b. Hệ có một nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \text{ vô nghiệm } \& \ (2) \text{ có nghiệm kép} \\ (2) \text{ vô nghiệm } \& \ (1) \text{ có nghiệm kép} \\ (1) \ \& \ (2) \text{ có nghiệm kép } u_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \Delta_f < 0 \\ \Delta_g = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta_g < 0 \\ \Delta_f = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta_g = \Delta_f = 0 \\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{m+1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -4m - 3 < 0 \\ m^2 + 2m - 3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m^2 + 2m - 3 < 0 \\ -4m - 3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m^2 + 2m - 3 = -4m - 3 = 0 \\ m = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\dfrac{3}{4} \end{cases}.$$

Vậy, với $m = 1$ hoặc $m = -\dfrac{3}{4}$ hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài 12:

a. Nhận xét rằng $\Delta' = (2\sqrt{3})^2 - 4.\sqrt{2} = 12 - 4\sqrt{2} > 0$

do đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

b. Hai nghiệm x_1 và x_2 của phương trình thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6} \\ x_1.x_2 = 12 = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{cases}$.

Ta có $A = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{3}$.

Bài 13: *Làm tượng tự bài tập 1.*

Bài 14: Để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2, điều kiện là:

$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 2m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \geq 1 \Leftrightarrow |m| \geq 1.$

Khi đó, hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1.x_2 = 2m + 2 \end{cases}$.

a. Ta có: $\begin{cases} (-2x_1) + (-2x_2) = -2(x_1 + x_2) = -4(m+1) \\ (-2x_1).(-2x_2) = 4x_1x_2 = 8(m+1) \end{cases}$

suy ra $-2x_1$ và $-2x_2$ là nghiệm của phương trình: $t^2 + 4(m+1)t + 8(m+1) = 0$.

b. Ta có: $\begin{cases} (3x_1) + (3x_2) = 9(x_1 + x_2) = 18(m+1) \\ (3x_1).(3x_2) = 9x_1x_2 = 18(m+1) \end{cases}$

suy ra $-2x_1$ và $-2x_2$ là nghiệm của phương trình: $t^2 - 18(m+1)t + 18(m+1) = 0$.

c. Ta có: $\begin{cases} (-x_1^2) + (-x_2^2) = -(x_1^2 + x_2^2) = -[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] = -4m^2 \\ (-x_1^2).(-x_2^2) = x_1^2.x_2^2 = (x_1x_2)^2 = 4(m+1)^2 \end{cases}$

suy ra $-x_1^2$ và $-x_2^2$ là nghiệm của phương trình: $t^2 + 4m^2t + 4(m+1)^2 = 0$.

d. Ta có: $\begin{cases} \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = 1 \\ \dfrac{1}{x_1}.\dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{x_1x_2} = \dfrac{1}{2m+2} \end{cases}$

suy ra $\dfrac{1}{x_1}$ và $\dfrac{1}{x_2}$ là nghiệm của phương trình: $t^2 - t + \dfrac{1}{2m+2} = 0$.

e. Ta có: $\begin{cases} (x_1 + x_2) + (-x_1x_2) = 0 \\ (x_1 + x_2).(-x_1x_2) = -4(m+1)^2 \end{cases}$

suy ra $x_1 + x_2$ và $-x_1.x_2$ là nghiệm của: $t^2 - 4(m+1)^2 = 0$.

Bài 17: Trước tiên, để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2, điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - 3m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m \geq 3 \\ m < 0 \end{bmatrix}.$$

Khi đó, phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1.x_2 = \dfrac{3}{m} \end{cases}$.

Và từ hệ trên, ta có ngay hệ thức $x_1 + x_2 = 2$, chính là hệ thức cần tìm.

Bài 18: Trước tiên, để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2, điều kiện là:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 + m - 1 \Leftrightarrow m^2 + 3m \geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m \geq 0 \\ m \leq -3 \end{bmatrix}.$$

Khi đó, phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1.x_2 = 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ 2x_1.x_2 = 2 - 2m \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 4,$$

chính là hệ thức cần tìm.

Bài 19:

a. Ta có $\Delta' = \cos^2\alpha - \sin\alpha + 1 = \cos^2\alpha + (1 - \sin\alpha) \geq 0, \forall\alpha$.

Vậy, với mọi α phương trình luôn có hai nghiệm x_1 và x_2.

b. Ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2\cos\alpha \\ x_1.x_2 = \sin\alpha - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ \sin\alpha = x_1.x_2 + 1 \end{cases} \overset{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}{\Rightarrow} \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + (x_1x_2 + 1)^2 = 1$$

đó chính là hệ thức cần tìm.

Bài 22: Để phương trình có hai nghiệm, điều kiện là: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Khi đó, hai nghiệm x_1 và x_2, thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 < 0 \\ x_1.x_2 = m \end{cases}$.

Để chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình, ta xét:

- Nếu $0 < m \leq 1$, phương trình có hai nghiệm âm.
- Nếu $m = 0$, phương trình có hai $x_1 = 0$ và $x_2 = -2$.
- Nếu $m < 0$, phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm dương có giá trị nhỏ hơn giá trị tuyệt đối của nghiệm âm.

Bài 23: Để phương trình có hai nghiệm, điều kiện là $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |m| \geq \dfrac{1}{2}$.

Khi đó, hai nghiệm x_1 và x_2, thoả mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m \\ x_1.x_2 = 1 > 0 \end{cases}$.

Để chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình, ta xét:

- Nếu $m \geq \frac{1}{2}$, phương trình có hai nghiệm dương.
- Nếu $m \leq -\frac{1}{2}$, phương trình có hai âm.

Bài 24: Để phương trình có hai nghiệm, điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9 - m^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -3 \leq m \leq 3 \end{cases}.$$

Khi đó, hai nghiệm x_1 và x_2, thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{6}{m} \\ x_1.x_2 = 1 \end{cases}$.

Để chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình, ta xét:

- Nếu $0 < m \leq 3$, phương trình có hai nghiệm dương.
- Nếu $-3 \leq m < 0$, phương trình có hai nghiệm âm.

Bài 25: Để phương trình có hai nghiệm, điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 16 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \neq m \leq 16.$$

Khi đó, hai nghiệm x_1 và x_2, thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{8}{m} \\ x_1.x_2 = \frac{1}{m} \end{cases}$.

Để chỉ ra dấu của hai nghiệm của phương trình, ta xét:

- Nếu $0 < m \leq 16$, phương trình có hai nghiệm dương.
- Nếu $m < 0$, phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm dương có giá trị nhỏ hơn giá trị tuyệt đối của nghiệm âm.

Bài 26:

a. Để phương trình có hai nghiệm trái dấu, điều kiện là:

$$P < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow m^2 < 4 \Leftrightarrow |m| < 2.$$

Vậy, với $|m| < 2$ phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b. Để phương trình có hai nghiệm cùng dấu, điều kiện là:

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+7)^2 - (m^2 - 4) \geq 0 \\ m^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14m + 53 \geq 0 \\ m^2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{53}{14} \leq m < -2 \\ m > 2 \end{cases}.$$

Vậy, với $-\frac{53}{14} \leq m < -2$ hoặc $m > 2$ phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

Bài 27:

a. Để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt, điều kiện là

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ (m+2)^2 - (m-1)(m-1) > 0 \\ 1 > 0 \\ -\dfrac{2(m+2)}{m-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Vậy, với $m > 1$ phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.

b. Để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt, điều kiện là

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ (m+2)^2 - (m-1)(m-1) > 0 \\ 1 > 0 \\ -\dfrac{2(m+2)}{m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 1.$$

Vậy, với $-\frac{1}{2} < m < 1$ phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

Bài 28:

a. Để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt, điều kiện là

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ m^2 - (m-1)(m+1) > 0 \\ \dfrac{m+1}{m-1} > 0 \\ -\dfrac{2m}{m-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Vậy, với $0 < m < 1$ phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.

b. Để phương trình có hai nghiệm đối nhau, điều kiện là

$$\begin{cases} P < 0 \\ S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m+1}{m-1} < 0 \\ \dfrac{2m}{m-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy, với $m = 0$ phương trình có hai nghiệm đối nhau.

Bài 29:

a. Theo giả thiết ta được:

$ac < 0 \Leftrightarrow$ phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ cũng có đúng một nghiệm dương.

Do x_1 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ suy ra:

$$a x_1^2 + b x_1 + c = 0 \xleftrightarrow{x_1^2 \neq 0} a + b\left(\frac{1}{x_1}\right) + c\left(\frac{1}{x_1^2}\right) = 0.$$

Tức là, $\frac{1}{x_1}$ là nghiệm dương của phương trình $cx^2 + bx + a = 0$, nên $x_2 = \frac{1}{x_1}$.

b. Ta có ngay: $x_1 + x_2 = x_1 + \dfrac{1}{x_1} \geq 2$, đpcm.

Bài 30: Để phương trình có nghiệm x_1 và x_2, điều kiện là $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |m| \geq 2$.

Khi đó, hai nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1.x_2 = 4 \end{cases}$.

a. Để các biểu thức E và F có nghĩa thì phương trình phải có hai nghiệm không âm, tức ứng với $m \leq -2$.

Khi đó:

$$E^2 = (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = -2m + 2\sqrt{4} = 4 - 2m \Leftrightarrow E = \sqrt{4 - 2m}.$$

$$F^2 = (\sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2})^2 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 2\sqrt[4]{x_1 x_2} = 4 - 2m + 2\sqrt[4]{4} \Leftrightarrow F = \sqrt{4 - 2m + \sqrt{2}}.$$

b. Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4m^2 - 8$.

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = (4m^2 - 8)^2 - 32.$$

Do đó: $x_1^4 + x_2^4 = 32 \Leftrightarrow (4m^2 - 8)^2 - 32 = 32 \Leftrightarrow (4m^2 - 8)^2 = 64$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4m^2 - 8 = 8 \\ 4m^2 - 8 = -8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4m^2 = 16 \\ 4m^2 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = \pm 2 \\ m = 0 \text{(loại)} \end{bmatrix}$$

Vậy, với $m = \pm 2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Ta có: $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 = x_1^4 + x_2^4 = \dfrac{(4m^2 - 8)^2 - 32}{16}$.

Do đó: $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 = 47 \Leftrightarrow \dfrac{(4m^2 - 8)^2 - 32}{16} = 47$

$$\Leftrightarrow (4m^2 - 8)^2 = 784 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4m^2 - 8 = 28 \\ 4m^2 - 8 = -28 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4m^2 = 36 \\ 4m^2 = -20 \text{ loại} \end{bmatrix} \Leftrightarrow m = \pm 3.$$

Vậy, với $m = \pm 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 31. Theo giả thiết ta được: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a \\ x_1.x_2 = c/a \end{cases}$. (I)

Xét

$$P = (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1) = x_1x_2 - k(x_1^2 + x_2^2) + k^2 x_1 x_2$$

$$= x_1x_2 - k[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] + k^2 x_1 x_2$$

$$= \frac{c}{a} - k\left[\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}\right] + k^2\frac{c}{a} = \frac{(k+1)^2 ac - kb^2}{a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow P = 0 \Leftrightarrow (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 - kx_2 = 0 \\ x_2 - kx_1 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 = kx_2 \\ x_2 = kx_1 \end{bmatrix}, \text{đpcm.}$$

CHỦ ĐỀ 6

PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Vấn đề 1: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Phương pháp

Biến đổi phương trình về dạng: $A.B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$.

Ví dụ 1: *Giải các phương trình sau:*

a. (Bài 36.a/tr 56 – Sgk): $(3x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 0$.

b. (Bài 39.a/tr 57 – Sgk): $(3x^2 - 7x - 10)[2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + \sqrt{5} - 3] = 0$.

Giải

a. Ta có: $(3x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x^2 - 5x + 1 = 0 & (1) \\ x^2 - 4 = 0 & (2) \end{array}\right.$

- Giải (1), ta được: $3x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2 + \sqrt{13}}{6} \\ x = \dfrac{2 - \sqrt{13}}{6} \end{array}\right.$
- Giải (2), ta được: $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm.

b. Ta có:

$$(3x^2 - 7x - 10)[2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + \sqrt{5} - 3] = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 7x - 10 = 0 \\ 2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + \sqrt{5} - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \vee x = \dfrac{10}{3} \\ x = \dfrac{\sqrt{5} - 1 \pm \sqrt{30 - 10\sqrt{5}}}{4} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm.

Ví dụ 2: *Giải các phương trình sau:*

a. (Bài 36.b/tr 56 – Sgk): $(2x^2 + x - 4)^2 - (2x - 1)^2 = 0$.

b. (Bài 39.d/tr 57 – Sgk): $(x^2 + 2x - 5)^2 = (x^2 - x + 5)^2$.

Giải

a. Ta có: $(2x^2 + x - 4)^2 - (2x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow [(2x^2 + x - 4) - (2x - 1)][(2x^2 + x - 4) + (2x - 1)] = 0$

$\Leftrightarrow (2x^2 - x - 3)(2x^2 + 3x - 5) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - x - 3 = 0 \\ 2x^2 + 3x - 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \vee x = -\dfrac{5}{2} \\ x = 1 \vee x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có 4 nghiệm.

b. Ta có: $(x^2 + 2x - 5)^2 = (x^2 - x + 5)^2 \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 5)^2 - (x^2 - x + 5)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (3x - 10)(2x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 10 = 0 \\ 2x^2 + x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{10}{3} \\ x = 0 \ \vee \ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có 3 nghiệm.

Ví dụ 3: (Bài 39.c/tr 57 – Sgk): *Giải phương trình*: $(x^2 - 1)(0,6x + 1) = 0,6x^2 + x$.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$(x^2 - 1)(0,6x + 1) = x(0,6x + 1) \Leftrightarrow (0,6x + 1)(x^2 - x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0,6x + 1 = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5/3 \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \vee x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có 3 nghiệm.

Vấn đề 2: SỬ DỤNG ẨN PHỤ CHUYỂN PHƯƠNG TRÌNH VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Ví dụ 1: (Bài 37.d/tr 56 – Sgk): *Giải các phương trình sau*: $2x^2 + 1 = \dfrac{1}{x^2} - 4$.

Giải

Đặt $x^2 = t \geq 0$, ta được: $2t + 1 = \dfrac{1}{t} - 4 \Leftrightarrow 2t^2 + 5t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-5+\sqrt{33}}{4} \\ t = \dfrac{-5-\sqrt{33}}{4} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{-5+\sqrt{33}}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\sqrt{-5+\sqrt{33}}}{2} \\ x = \dfrac{\sqrt{-5+\sqrt{33}}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm.

Ví dụ 2: (Bài 59/tr 63 – Sgk): *Giải các phương trình sau:*

a. $2(x^2 - 2x)^2 + 3(x^2 - 2x) + 1 = 0.$

b. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) = 3 = 0.$

Giải

a. Đặt $x^2 - 2x = t$. Ta được: $2t^2 + 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -1/2 \end{array}\right.$.

Ta lần lượt:

- Với $t = -1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- Với $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$..

Vậy, phương trình có ba nghiệm.

b. Đặt $\left(x + \frac{1}{x}\right) = t$. Ta được: $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right.$.

Ta lần lượt:

- Với $t = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ (vô nghiệm).
- Với $t = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$..

Vậy, phương trình có hai nghiệm.

Ví dụ 3: (Bài 40/tr 57 – Sgk): *Giải các phương trình sau:*

a. $3(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 1 = 0.$ b. $(x^2 - 4x + 2)^2 + x^2 - 4x - 4 = 0.$

c. $x - \sqrt{x} = 5\sqrt{x} + 7.$ d. $\frac{x}{x+1} - 10.\frac{x+1}{x} = 3.$

Giải

a. Đặt $x^2 + x = t$, ta được: $3t^2 - 2t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x = 1 \\ x^2 + x = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 1 = 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 = 0 \text{ (vn)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm.

b. Đặt $x^2 - 4x + 2 = t$, ta được: $t^2 + t - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 2 = 2 \\ x^2 - 4x + 2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x = 0 \\ x^2 - 4x + 5 = 0 \text{ (vn)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm.

c. Đặt $\sqrt{x} = t \geq 0$, ta được:

$$t^2 - 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 7 \end{array}\right. \Rightarrow \sqrt{x} = 7 \Leftrightarrow x = 49.$$

Vậy, phương trình có một nghiệm.

d. Điều kiện $x \neq 0$; $x \neq -1$

Đặt $\frac{x}{x+1} = t \neq 0$, ta được: $t - 10.\frac{1}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 10 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 5 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{x+1} = 5 \\ \frac{x}{x+1} = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5(x+1) \\ x = -2(x+1) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4} \text{ hoặc } x = -\frac{2}{3}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm.

Vấn đề 3: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình.

Bước 2: Khử mẫu, đưa phương trình về dạng thông thường.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện cho các nghiệm tìm được rồi kết luận.

Ví dụ 1: (Bài 57.c, 57.d/tr 63 – Sgk): *Giải các phương trình sau:*

a. $\frac{x}{x-2} = \frac{10-2x}{x^2-2x}$. b. $\frac{x+0,5}{3x+1} = \frac{7x+2}{9x^2-1}$.

Giải

a. Điều kiện: $x \neq 0$, $x \neq 2$.

Ta có:

$$\frac{x}{x-2} = \frac{10-2x}{x^2-2x} \Leftrightarrow x^2 = 10 - 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 - \sqrt{11} \\ x = -1 + \sqrt{11} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm.

b. Điều kiện: $x \neq \pm\frac{1}{3}$.

Ta có: $\frac{x+0,5}{3x+1} = \frac{7x+2}{9x^2-1} \Leftrightarrow (x + 0,5)(3x - 1) = 7x + 2$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6,5x - 2,5 = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 13x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} \\ x = \frac{5}{2} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm.

Ví dụ 2: (Bài 35.b, 35.c/tr 56 – Sgk): *Giải các phương trình sau:*

a. $\dfrac{x+2}{x-5}+3=\dfrac{6}{2-x}$. b. $\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{-x^2-x+2}{(x+1)(x+2)}$.

Giải

a. Tập xác định: $x \neq 5$, $x \neq 2$. Ta có:

$$\frac{x+2}{x-5}+3=\frac{6}{2-x} \Leftrightarrow (x+2)(2-x)+3(x-5)(2-x)=6(x-3)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-15x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm.

b. Tập xác định: $x \neq -1$, $x \neq -2$. Biến đổi phương trình về dạng:

$$4(x+2)=-x^2-x+2 \Leftrightarrow x^2+5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \text{ (loại)} \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có một nghiệm.

☞ ***Chú ý***: Trong một vài trường hợp, việc quy đồng mẫu số không phải là giải pháp tối ưu, đặc biệt khi quy đồng chúng ta nhận được một phương trình bậc cao hơn 2, trong những trường hợp như vậy chúng ta thường nghĩ tới những phương pháp giảm bậc cho phương trình và một trong số đó là phương pháp đặt ẩn phụ. Ví dụ sau sẽ minh hoạ nhận định này.

Ví dụ 3: *Giải phương trình:* $\dfrac{x^2+2}{x^2-2x+2}-\dfrac{x^2+2}{x^2+3x+2}=\dfrac{5}{2}$.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-2x+2 \neq 0 \\ x^2+3x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \end{cases}$. (*)

Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả tử và mẫu của VT của phương trình cho $x \neq 0$, ta được: $\dfrac{x+\dfrac{2}{x}}{x-2+\dfrac{2}{x}}-\dfrac{x+\dfrac{2}{x}}{x+3+\dfrac{2}{x}}=\dfrac{5}{2}$.

Đặt $t = x + \dfrac{2}{x}$, khi đó phương trình được chuyển về dạng:

$$\frac{t}{t-2}-\frac{t}{t+3}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{t(t+3)-t(t-2)}{(t-2)(t+3)}=\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5t}{(t-2)(t+3)} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2t = (t-2)(t+3) \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{2}{x} = 3 \\ x + \dfrac{2}{x} = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 + 2x + 2 = 0 \text{ loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 2$.

☞ ***Nhận xét***:

1. Như vậy, với bài toán trên nếu chúng ta lựa chọn hướng quy đồng mẫu số thì sẽ nhận được một phương trình bậc 4 và việc giải phương trình này phụ thuộc rất nhiều vào kỹ năng đoán nghiệm cùng phép chia đa thức để chuyển phương trình về dạng tích. Tuy nhiên, một câu hỏi thường được các em học sinh đặt ra ở đây là " *Tại sao lại có thể nghĩ ra được cách chia cho x rồi đặt ẩn phụ như vậy ?*", câu trả lời có thể được khẳng định ở dạng phương trình tổng quát:

$$\frac{ax^2 + mx + c}{ax^2 + nx + c} + \frac{ax^2 + px + c}{ax^2 + qx + c} = 0.$$

Ta có thể lựa chọn phép chia cả tử và mẫu cho x (hoặc x^2) rồi đặt ẩn phụ $t = ax + \dfrac{c}{x}$ (hoặc $t = a + \dfrac{c}{x^2}$).

Ý tưởng trên được mở rộng, cho phương trình dạng:

$$\frac{mx}{ax^2 + bx + d} + \frac{nx}{ax^2 + cx + d} = p.$$

2. Việc lựa chọn ẩn phụ, trong hầu hết các trường hợp luôn cần tới những biến đổi đại số để làm xuất hiện dạng của ẩn phụ và để thực hiện tốt công việc này các em học sinh luôn phải thật linh hoạt và sáng tạo. Ví dụ sau sẽ minh hoạ nhận định này.

Ví dụ 4: *Giải phương trình*: $x^2 + \dfrac{4x^2}{(x+2)^2} = 5.$

✍ *Giải*

Điều kiện: $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2.$ (*)

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^2 + \left(\frac{2x}{x+2}\right)^2 = 5 \Leftrightarrow \left(x - \frac{2x}{x+2}\right)^2 = 5 - 2.x.\frac{2x}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2 + 4.\frac{x^2}{x+2} - 5 = 0.$$

Đặt $t = \frac{x^2}{x+2}$, khi đó phương trình được chuyển về dạng:

$t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -5$.

- Với $t = 1$, ta được: $\frac{x^2}{x+2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.
- Với $t = -5$, ta được $\frac{x^2}{x+2} = -5 \Leftrightarrow x^2 = -5x - 10 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 = 0$, vn.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 2$.

Vấn đề 4: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

Phương pháp

Để giải phương trình: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. (1)

ta thực hiện các bước:

Bước 1: Đoán nghiệm x_0 của (1).

Bước 2: Phân tích (1) thành

$$(x - x_0)(ax^2 + b_1x + c_1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ g(x) = ax^2 + b_1x + c_1 = 0 \ (2) \end{array}\right.$$

Bước 3: Giải (2) rồi kết luận về nghiệm cho phương trình.

☞ ***Chú ý:***

1. Dự đoán nghiệm dựa vào các kết quả sau:
   a. Nếu $a + b + c + d = 0$ thì (1) có nghiệm $x = 1$.
   b. Nếu $a - b + c - d = 0$ thì (1) có nghiệm $x = -1$.
   c. Nếu a, b, c, d nguyên và (1) có nghiệm hữu tỷ $\frac{p}{q}$ thì p, q theo thứ tự là ước của d và a.
   d. Nếu $ac^3 = bd^3$ $(a, d \neq 0)$ thì (1) có nghiệm $x = -\frac{c}{b}$.
2. Với các phương trình có chứa tham số có thể coi tham số là ẩn để thực hiện việc phân tích đa thức.

Ví dụ 1: *Giải các phương trình sau:*

a. $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$. b. $2x^3 + x + 3 = 0$.

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng: $a + b + c + d = 0$ do đó phương trình có nghiệm $x = 1$.
Biến đổi phương trình về dạng:

$$x - 1)(2x^2 + 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 2x^2 + 3x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = 1$, $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$.

b. Nhận xét rằng: $a - b + c - d = 0$ do đó phương trình có nghiệm $x = -1$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(x + 1)(2x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + 1 = 0 \\ 2x^2 - 2x + 3 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Ví dụ 2: (Bài 57/tr 63 – Sgk): *Giải các phương trình sau*:

a. $1,2x^3 - x^2 - 0,2x = 0$. b. $5x^3 - x^2 - 5x + 1 = 0$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$1,2x^3 - x^2 - 0,2x = 0 \Leftrightarrow x(1,2x^2 - x - 0,2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ 1,2x^2 - x - 0,2 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 1 \vee x = -\frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm.

b. Ta có:

$$5x^3 - x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow 5x^3 - 5x - x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 5x(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(5x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2 - 1 = 0 \\ 5x - 1 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \pm 1 \\ x = 1/5 \end{bmatrix}.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm.

Ví dụ 3: *Giải các phương trình sau*:

a. $3x^3 - 8x^2 - 2x + 4 = 0$. b. $x^3 + x^2 - x\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0$.

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng: $a = 3$ có ước là $\pm 1, \pm 3$ và $d = 2$ có ước là $\pm 1, \pm 2$ do đó phương trình nếu có nghiệm hữu tỷ thì chỉ có thể là một trong các giá trị ± 1, $\pm 2, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$.

Nhận thấy $x = \frac{2}{3}$ là nghiệm của phương trình.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(3x - 2)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \frac{2}{3} \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = \frac{2}{3}$, $x = 1 - \sqrt{3}$, $x = 1 + \sqrt{3}$.

b. Nhận xét rằng: $ac^3 = 1.(-\sqrt{2})^3 = -2\sqrt{2} = bd^3$ do đó phương trình có nghiệm $x = -\frac{c}{b} = \sqrt{2}$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(x-\sqrt{2})[x^2+(\sqrt{2}+1)x+2]=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{2}=0 \\ x^2+(\sqrt{2}+1)x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \sqrt{2}$.

☞ ***Chú ý***: Khi đã thành thạo các phương pháp nhẩm nghiệm các bạn học sinh không cần nêu nhận xét trong lời giải cho mỗi phương trình.

Ví dụ 4: (Bài 39.b/tr 57 – Sgk): *Giải các phương trình sau*: $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$.

✍ *Giải*

Ta có:

$$x^3+3x^2-2x-6=0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ x^2-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có 3 nghiệm.

Ví dụ 5: *Cho phương trình*: $x^3 - (2m+1)x^2 + 3(m+4)x - m - 12 = 0$. (1)

a. *Giải phương trình với* $m = -12$.

b. *Xác định* m *để phương trình có* 3 *nghiệm phân biệt.*

✍ *Giải*

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(x-1)(x^2-2mx+m+12)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ g(x)=x^2-2mx+m+12=0 \quad (2) \end{cases}. \qquad (I)$$

a. Với $m = -12$, hệ (I) có dạng: $\begin{cases} x-1=0 \\ x^2+24x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \\ x=-24 \end{cases}$.

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = 1, x = 0, x = -24$.

b. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi:

Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-12>0 \\ 13-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-3 \\ 4<m\neq 13 \end{cases}.$$

Vậy, với $m < -3$ hoặc $4 < m \neq 13$ phương trình có ba nghiệm phân biệt.

☞ ***Chú ý***: Nếu phương trình có chứa tham số m, ta có thể coi m là ẩn, còn x là tham số. Sau đó tìm lại x theo m.

Ví dụ 6: *Xác định* m *để phương trình*:

$$m^2x^3 - 3mx^2 + (m^2 + 2)x - m = 0, \text{ với } m \neq 0. \quad (1)$$

có ba nghiệm phân biệt.

Giải

Viết lại phương trình về dạng: $(x^3 + x)m^2 - (3x^2 + 1)m + 2x = 0$

Coi m là ẩn, còn x là tham số, ta được phương trình bậc 2 theo m.

Giải ra ta được: $m = \frac{1}{x}$ hoặc $m = \frac{2x}{x^2+1}$.

Do đó phương trình được chuyển về dạng:

$$(mx - 1)(mx^2 - 2x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} mx - 1 = 0 \\ f(x) = mx^2 - 2x + m = 0 \end{bmatrix}.$$

Phương trình có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $\frac{1}{m}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ f(-1/m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - m^2 > 0 \\ m - 1/m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ |m| < 1 \end{cases}.$$

Vậy, với $m \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Chú ý: Nếu các phương pháp nhẩm nghiệm không có tác dụng ta có thể thử vận dụng kiến thức về phân tích đa thức.

Ví dụ 7: *Giải phương trình*: $x^3 - 3x^2\sqrt{3} + 7x - \sqrt{3} = 0$.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1) \Leftrightarrow x^3 - x^2\sqrt{3} - 2x^2\sqrt{3} + 6x + x - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x - \sqrt{3}) - 2x\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) + (x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x^2 - 2x\sqrt{3} + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - \sqrt{3} = 0 \\ x^2 - 2x\sqrt{3} + 1 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \pm \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = \sqrt{3}$, $x = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$.

Vấn đề 5: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH TRÙNG PHƯƠNG

Phương pháp

Với phương trình: $ax^4 + bx^2 + c = 0$. (1)

ta thực hiện các bước:

Bước 1: Đặt $t = x^2$ với điều kiện $t \geq 0$.

Bước 2: Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$at^2 + bt + c = 0. \quad (2)$$

Bước 3: Giải (2) để tìm nghiệm t, từ đó suy ra nghiệm x cho phương trình.

☞ ***Chú ý:*** Nếu phương trình (2) có nghiệm $t_0 \geq 0$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = \pm\sqrt{t_0}$.

Ví dụ 1: (Bài 56/tr 63 – Sgk): *Giải các phương trình sau:*

a. $3x^4 - 12x^2 + 9 = 0$. b. $2x^4 + 3x^2 - 2 = 0$.

c. $x^4 + 5x^2 + 1 = 0$.

✍ *Giải*

a. Đặt $x^2 = t \geq 0$. Ta được: $3t^2 - 12t + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 3 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình đã cho có 4 nghiệm.

b. Đặt $x^2 = t \geq 0$. Ta được:

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1/2 \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy, phương trình đã cho có 2 nghiệm.

c. Đặt $x^2 = t \geq 0$. Ta được: $t^2 + 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-5+\sqrt{21}}{2} < 0 \text{ (loại)} \\ t = \dfrac{-5-\sqrt{21}}{2} < 0 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

☞ ***Chú ý:*** Ta cũng có thể đưa ra nhận xét để kết luận phương trình vô nghiệm như sau:

Dễ thấy: $x^4 + 5x^2 \geq 0 \Rightarrow x^4 + 5x^2 + 1 > 0$.

Vậy, phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2: *Cho phương trình:* $mx^4 - 2(m-1)x^2 + m - 1 = 0$. (1)

Tìm m *để phương trình:*

a. *Có nghiệm duy nhất.* b. *Có hai nghiệm phân biệt.*

c. *Có ba nghiệm phân biệt.* d. *Có bốn nghiệm phân biệt.*

✍ *Giải*

Đặt $t = x^2$ với điều kiện $t \geq 0$. Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$f(t) = mt^2 - 2(m-1)t + m - 1 = 0$. (2)

Ta xét hai trường hợp :

Trường hợp 1: Với m = 0, ta được :

$$(2) \Leftrightarrow 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy với m = 0 phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$.

a. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \text{(2) có nghiệm } t_1 \leq 0 = t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} S \leq 0 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2(m-1)}{m} \leq 0 \\ \dfrac{m-1}{m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với $m = 1$ phương trình có nghiệm duy nhất.

b. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m(m-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Vậy, với $0 \leq m < 1$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt .

c. Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \text{(2) có nghiệm } 0 = t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ \dfrac{m-1}{m} = 0 \\ \dfrac{2(m-1)}{m} > 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt .

d. Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \text{(2) có nghiệm } 0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ \dfrac{m-1}{m} > 0 \\ \dfrac{2(m-1)}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Vậy, với $m < 0$ phương trình có 4 nghiệm phân biệt .

Vấn đề 6: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HỒI QUY VÀ PHẢN HỒI QUY

Phương pháp

Ta xét hai dạng phương trình:

Dạng 1: (*Phương trình hồi quy*) Để giải phương trình:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0. \quad (1)$$

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0. \quad (2)$$

Bước 2: Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$, suy ra $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Khi đó, phương trình (2) có dạng:

$$(2) \Leftrightarrow at^2 + bt + c - 2a = 0. \quad (3)$$

Dạng 2: (*Phương trình phản hồi quy*) Để giải phương trình:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0. \quad (1)$$

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0. \quad (2)$$

Bước 2: Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$.

Khi đó, phương trình (2) có dạng: $at^2 + bt + c + 2a = 0$. (3)

☞ ***Chú ý:*** Phương pháp được mở rộng tự nhiên cho dạng phương trình:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

có các hệ số thoả mãn: $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$, $e \neq 0$.

Khi đó ta sử dụng ẩn phụ $t = x + \frac{d}{b}.\frac{1}{x}$.

Trước hết chúng ta quan tâm tới phương trình có dạng hồi quy.

Ví dụ 1: *Giải phương trình* $x^4 - \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$.

✍ *Giải*

Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$x^2 - \frac{1}{2}x - 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, điều kiện $|t| \geq 2$, suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Khi đó phương trình có dạng: $t^2 - \frac{1}{2}t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\frac{3}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

Ví dụ 2: *Giải phương trình:* $x^4 + 3x^3 - \frac{35}{4}x^2 - 3x + 1 = 0$.

Giải

Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$x^2 + 3x - \frac{35}{4} - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow (x^2 + \frac{1}{x^2}) + 3(x - \frac{1}{x}) - \frac{35}{4} = 0.$$

Đặt $t = x - \frac{1}{x}$, suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t^2 + 2 + 3t - \frac{35}{4} = 0 \Leftrightarrow 4t^2 + 12t - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{3}{2} \\ t_2 = -\frac{9}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \\ x - \frac{1}{x} = -\frac{9}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ 2x^2 + 9x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \,\&\, x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_{3,4} = \frac{-9 \pm \sqrt{97}}{4} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm phân biệt:

$$x_1 = 2,\ x_2 = -\frac{1}{2},\ x_{3,4} = \frac{-9 \pm \sqrt{97}}{4}.$$

Chú ý: Ví dụ tiếp theo minh họa cho dạng mở rộng với điều kiện cho các hệ số là $\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$.

Ví dụ 3: *Giải phương trình*: $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$.

Giải

Nhận xét rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được phương trình tương đương:

$$2(x^2 + \frac{25}{x^2}) - 21(x + \frac{5}{x}) + 74 = 0$$

Đặt $t = x + \frac{5}{x}$, suy ra $x^2 + \frac{25}{x^2} = t^2 - 10$.

Khi đó, phương trình trên có dạng: $2t^2 - 21t + 54 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 6 \text{ (loại)} \\ t = 9/2 \end{array}\right.$.

- Với $t = 6$, ta được: $x + \frac{5}{x} = 6 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ và $x_2 = 5$.
- Với $t = \frac{9}{2}$, ta được: $x + \frac{5}{x} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 10 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 2; x_4 = \frac{5}{2}$.

Vậy, phương trình có bốn nghiệm phân biệt là $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 2, x_4 = \frac{5}{2}$.

☞ *Chú ý*: Nhiều phương trình ở dạng ban đầu không phải là một phương trình hồi quy hay phản hồi quy, tuy nhiên với phép đặt ẩn phụ thích hợp ta có thể chuyển chúng về dạng hồi quy hoặc phản hồi quy, từ đó áp dụng phương pháp đã biết để giải. Ta đi xem xét hai ví dụ sau.

Ví dụ 4: *Giải phương trình*:

$$(x-2)^4 + (x-2)(5x^2 - 14x + 13) + 1 = 0. \quad (1)$$

✍ *Giải*

Nhận xét rằng đây không phải là một phương trình hồi quy, tuy nhiên nếu đặt ẩn phụ thích hợp ta sẽ có một phương trình hồi quy.

Thật vậy, đặt $y = x - 2$, phương trình được biến đổi về dạng:

$$y^4 + y[5(y+2)^2 - 14(y+2) + 13] + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^4 + 5y^3 + 6y^2 + 5y + 1 = 0. \quad (2)$$

Nhận xét rằng $y = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $y^2 \neq 0$, ta được phương trình tương đương:

$$(y^2 + \frac{1}{y^2}) + 5(y + \frac{1}{y}) + 6 = 0$$

Đặt $t = y + \frac{1}{y}$, suy ra $y^2 + \frac{1}{y^2} = t^2 - 2$.

Khi đó, phương trình trên có dạng: $t^2 + 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -4 \end{array}\right.$.

- Với $t = -1$, ta được: $y + \frac{1}{y} = -1 \Leftrightarrow y^2 - y + 1 = 0$, vô nghiệm.
- Với $t = -4$, ta được:

$$y + \frac{1}{y} = -4 \Leftrightarrow y^2 + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = -2 - \sqrt{3} \\ y_2 = -2 + \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{3} \\ x_2 = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$.

Ví dụ 5: *Giải phương trình*: $(x^2 - x)^2 - 2x(3x - 5) - 3 = 0$.

✍ *Giải*

Nhận xét rằng đây không phải là một phương trình phản hồi quy, tuy nhiên nếu đặt ẩn phụ thích hợp ta sẽ có một phương trình phản hồi quy.

Thật vậy, đặt $y = x - 1$, phương trình được biến đổi về dạng:

$$[(y+1)^2 - (y+1)] - 2(y+1)[3(y+1) - 5] - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^4 + 2y^3 - 5y^2 - 2y + 1 = 0.$$

Nhận xét rằng $y = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $y^2 \neq 0$, ta được phương trình tương đương:

$$(y^2 + \frac{1}{y^2}) + 2(y - \frac{1}{y}) - 5 = 0$$

Đặt $t = y - \frac{1}{y}$, suy ra $y^2 + \frac{1}{y^2} = t^2 + 2$.

Khi đó, phương trình trên có dạng: $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \end{array}\right.$.

- Với $t = 1$, ta được:

$$y - \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

- Với $t = -3$, ta được:

$$y - \frac{1}{y} = -3 \Leftrightarrow y^2 + 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow y_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Vậy, phương trình có 4 nghiệm phân biệt là $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Vấn đề 7: SỬ DỤNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$, với $a + b = c + d$

Phương pháp

Kí hiệu phương trình ban đầu là (1), ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$[x^2 + (a + b)x + ab].[x^2 + (c + d)x + cd] = m. \quad (2)$$

Bước 2: Đặt $t = x^2 + (a + b)x + ab$, suy ra:

$$x^2 + (c + d)x + cd = t - ab + cd.$$

Khi đó, phương trình (2) có dạng:

$$t(t - ab + cd) = m \Leftrightarrow t^2 - (ab - cd)t - m = 0. \quad (3)$$

Ví dụ 1: *Giải phương trình*: $(x + 4)(x + 5)(x + 7)(x + 8) = 4$.

Giải

Viết lại phương trình dưới dạng: $(x^2 + 12x + 32)(x^2 + 12x + 35) = 4$.

Đặt $t = x^2 + 12x + 32$, suy ra $x^2 + 12x + 35 = t + 3$.

Khi đó, phương trình trên có dạng:

$$t(t + 3) = 4 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -4 \\ t = 1 \end{array}\right.$$

- Với $t = -4$, ta được:

$$x^2 + 12x + 32 = -4 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 28 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -6 \pm 2\sqrt{2}.$$

- Với t = 1, ta được:

$$x^2 + 12x + 32 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 31 = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} = -6 \pm \sqrt{5}.$$

Vậy, phương trình có 4 nghiệm phân biệt là

$$x_{1,2} = -6 \pm 2\sqrt{2} \text{ và } x_{3,4} = -6 \pm \sqrt{5}.$$

☞ ***Chú ý***: Dạng phương trình trên được mở rộng tự nhiên cho lớp phương trình:

$$(a_1x + a_2)(b_1x + b_2)(c_1x + c_2)(d_1x + d_2) = m$$

$$\text{với điều kiện: } \begin{cases} a_1.b_1 = c_1.d_1 \\ a_1.b_2 + a_2.b_1 = d_1.c_2 + d_2.c_1 \end{cases}$$

khi đó ta đặt $t = (a_1x + a_2)(b_1x + b_2)$.

Ví dụ 2: *Giải phương trình*: $(2x - 1)(x - 1)(x - 3)(2x + 3) = -9$.

✍ *Giải*

Viết lại phương trình dưới dạng: $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 - 3x - 9) = -9$.

Đặt $t = 2x^2 - 3x + 1$, suy ra $2x^2 - 3x - 9 = t - 10$.

Khi đó, phương trình có dạng: $t(t - 10) = -9 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 9 \end{array}\right.$.

- Với t = 1, ta được: $2x^2 - 3x + 1 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 3/2 \end{array}\right.$.

- Với t = 9, ta được:

$$2x^2 - 3x + 1 = 9 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 8 = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{73}}{4}.$$

Vậy, phương trình có 4 nghiệm phân biệt là $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{73}}{4}$.

Vấn đề 8: SỬ DỤNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$

Phương pháp

Kí hiệu phương trình ban đầu là (1), ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt $t = x + \frac{a+b}{2}$, suy ra: $\begin{cases} x + a = t + \frac{a-b}{2} \\ x + b = t - \frac{a-b}{2} \end{cases}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$2t^4 + 12\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.t^2 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4 = c. \quad (2)$$

Bước 2: Đặt $u = t^2$, điều kiện $u \geq 0$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$2u^2 + 12\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.u + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4 = c. \quad (3)$$

Bước 3: Giải (3) nhận được nghiệm u, từ đó suy ra nghiệm t rồi tới x.

Ví dụ 1: *Giải phương trình*: $(x+4)^4 + (x+6)^4 = 82$.

Giải

Đặt $t = x + \frac{4+6}{2} = x + 5$, suy ra: $\begin{cases} x+4 = t-1 \\ x+6 = t+1 \end{cases}$.

Khi đó, phương trình được chuyển về dạng:

$(t-1)^4 + (t+1)^4 = 82 \Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 + 2 = 82$

$\Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 4 \\ t = -10 \end{bmatrix}$.

- Với $t = 4$, ta được: $x + 5 = 4 \Leftrightarrow x = -1$.
- Với $t = -10$, ta được: $x + 5 = -10 \Leftrightarrow x = -15$.

Vậy, phương trình có 2 nghiệm $x = -1$ và $x = -15$.

Ví dụ 2: *Cho phương trình*: $(x+1)^4 + (x+3)^4 = 2m$. (1)

a. *Giải phương trình với* m = 1.

b. *Tìm* m *để phương trình có hai nghiệm phân biệt.*

Giải

Đặt $t = x + \frac{1+3}{2} = x + 2$, suy ra $\begin{cases} x+1 = t-1 \\ x+3 = t+1 \end{cases}$.

Khi đó, phương trình (1) được chuyển về dạng:

$(t-1)^4 + (t+1)^4 = 2m \Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 + 2 = 2m$

$\Leftrightarrow t^4 + 6t^2 + 1 - m = 0.$ (2)

Đặt $u = t^2$, điều kiện $u \geq 0$.

Khi đó, phương trình (2) được chuyển về dạng:

$f(u) = u^2 + 6u + 1 - m = 0.$ (3)

a. Với m = 1, ta được:

$$u^2 + 6u = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u = 0 \\ u = -6 \ (l) \end{bmatrix} \Leftrightarrow t^2 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Vậy, với m = 1 phương trình có nghiệm $x = -2$.

b. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt, điều kiện là:

(3) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow 1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Vậy, với m>1 phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Vấn đề 9: SỬ DỤNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

Phương pháp

Với các phương trình chứa dấu trị tuyệt đối, có thể được chuyển về phương trình bậc hai bằng một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng các phép biến đổi tương đương, bao gồm:

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}.$$

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \le 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \end{cases}.$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

Trước tiên chúng ta quan tâm tới phương trình chứa dấu trị tuyệt đối được chuyển về phương trình bậc hai bằng phương pháp biến đổi tương đương.

Ví dụ 1: *Giải phương trình:* $|x^2 - 2x - 2| = |x^2 + 2x|$.

Giải

Phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 2 = x^2 + 2x \\ x^2 - 2x - 2 = -x^2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -1 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -1 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm 1$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, ví dụ trên đã minh hoạ cho phép biến đổi tương đương thứ nhất của phương trình chứa dấu trị tuyệt đối.

Ví dụ 2: *Giải phương trình:* $|x^2 + x| = -x^2 + x + 2$.

Giải

Phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} -x^2 + x + 2 \ge 0 \\ \begin{cases} x^2 + x = -x^2 + x + 2 \\ x^2 + x = x^2 - x - 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ 2x = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ \begin{cases} x^2 = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \pm 1$.

☞ ***Chú ý:*** Các ví dụ tiếp theo, sẽ minh hoạ việc sử dụng ẩn phụ để chuyển phương trình chứa dấu trị tuyệt đối về phương trình bậc hai.

Ví dụ 3: *Giải phương trình*: $(x-1)^2+4|x-1|+3=0$.

Giải

Đặt $t=|x-1|$, điều kiện $t\ge 0$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$t^2+4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \ (l) \\ t=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow t=3$$

$$\Leftrightarrow |x-1|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=3 \\ x-1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm là $x=4$ và $x=-2$.

Vấn đề 10: SỬ DỤNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

Phương pháp

Với các phương trình chứa căn thức, có thể được chuyển về phương trình bậc hai bằng một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng các phép biến đổi tương đương, bao gồm:

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)\ge 0.$$

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g(x)\ge 0 \\ f(x)=g^2(x) \end{array}\right.$$

Cách 2: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

Trước tiên chúng ta quan tâm tới phương trình chứa căn thức được chuyển về phương trình bậc hai bằng phương pháp biến đổi tương đương.

Ví dụ 1: *Giải các phương trình*:

a. $\sqrt{x^2-4x+5}=\sqrt{x+1}$. b. $\sqrt{x^2-2x+3}=\sqrt{2x^2-7x+9}$.

Giải

Phương trình được biến đổi tương đương thành:

$$x^2-4x+5=x+1\ge 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+1\ge 0 \\ x^2-5x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=1$ và $x=4$.

Phương trình được biến đổi tương đương thành:

$$x^2-2x+3=2x^2-7x+9\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-2x+3\ge 0 \\ x^2-5x+6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-1)^2+2\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=2$ và $x=3$.

☞ *Nhận xét*: Trong ví dụ trên:

- Ở câu a), chúng ta lựa chọn điều kiện $x + 1 \ge 0$, vì có cảm giác nó đơn giản hơn điều kiện $x^2 - 4x + 5 \ge 0$. Tuy nhiên, thực tế ta thấy điều kiện $x^2 - 4x + 5 \ge 0$ là đơn giản hơn vì $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \ge 0$, luôn đúng. Và trong trường hợp này, chúng ta không cần kiểm tra lại nghiệm.
- Ở câu b), chúng ta lựa chọn điều kiện $x^2 - 2x + 3 \ge 0$, vì điều này luôn đúng.

Ví dụ 2: *Giải phương trình*: $\sqrt{2x^2 + x - 3} = x - 1$.

✍ *Giải*

Phương trình được biến đổi tương đương thành:

$$\begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ 2x^2 + x - 3 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

Ví dụ 3: *Giải phương trình*: $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$.

✍ *Giải*

Điều kiện: $\begin{cases} x + 4 \ge 0 \\ 1 - x \ge 0 \\ 1 - 2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le x \le \frac{1}{2}$.

Phương trình viết lại dưới dạng:

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt{x+4} \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(1-2x)} = 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \ge 0 \\ (1-x)(1-2x) = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ 2x^2 + 7x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{7}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

☞ ***Chú ý***: Các ví dụ tiếp theo, sẽ minh hoạ việc sử dụng ẩn phụ để chuyển phương trình chứa căn về phương trình bậc hai.

Ví dụ 4: *Cho phương trình*: $2(x^2 - 2x) + \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 9 = 0$.

✍ *Giải*

Điều kiện: $x^2 - 2x - 3 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \le -1 \end{array}\right.$. (*)

Viết lại phương trình dưới dạng : $2(x^2 - 2x - 3) + \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 3 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$, $t \ge 0$. (**)

Khi đó, phương trình có dạng:

$$2t^2+t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{3}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x-3}=1$$

$\Leftrightarrow x^2-2x-4=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{5}$ thoả mãn điều kiện (*).

Vậy, phương trình có nghiệm là $x=1\pm\sqrt{5}$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=1.$

b. $\dfrac{9(x^2+x+1)}{x^2-x+1}-\dfrac{7(x+1)}{x-1}=0.$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{x^2-2x-1}{6}-\dfrac{1}{x^2-2x}=0.$

b. $\dfrac{2}{x^2-3x+3}+\dfrac{1}{x^2-3x+4}=\dfrac{15}{2(x^2-3x+5)}.$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{2x^2+5x+8}{2x^2+3x+8}+\dfrac{2x^2+3x+8}{2x^2+7x+8}=0.$

b. $\dfrac{5x^2+6x+9}{5x^2+4x+9}+\dfrac{5x^2+10x+9}{5x^2+7x+9}=0.$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+5x+2}+\dfrac{2x}{x^2-5x+2}=0.$

b. $\dfrac{2x^2+x+3}{2x^2-7x+3}+\dfrac{3x}{2x^2+6x+3}=0.$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

a. $x^2+\dfrac{9x^2}{(x+3)^2}-8=0.$

b. $4x^2+\dfrac{x^2}{(2x+1)^2}-5=0.$

Bài 6: Cho phương trình: $\dfrac{a}{x-b}+\dfrac{b}{x-a}=2.$

a. Tìm a, b để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b. Tìm a, b để phương trình có nghiệm.

Bài 7: Giải các phương trình sau:

a. $4x^3-9x^2+6x-1=0.$

b. $2x^3+x^2-5x+2=0.$

c. $2x^3+x+3=0.$

d. $2x^3+7x^2+7x+2=0.$

e. $2x^3-9x+2=0.$

f. $8x^3-4x^2+10x-5=0.$

Bài 8: Giải phương trình sau, biết rằng phương trình có một nghiệm không phụ thuộc vào a, b và $b > 0$: $x^3 - (2a + 1)x^2 + (a^2 + 2a - b)x - (a^2 - b) = 0$.

Bài 9: Cho phương trình: $mx^3 + (3m - 4)x^2 + (3m - 7)x + m - 3 = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 3$.

b. Xác định m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt không dương.

Bài 10: Cho phương trình: $x^3 - 2mx^2 + mx + m - 1 = 0$.

Xác định m để:

a. Phương trình có đúng 1 nghiệm.

b. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

c. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Bài 11: Cho phương trình: $x^3 - 2mx^2 + (2m^2 - 1)x - m(m^2 - 1) = 0$.

Xác định m để:

a. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

b. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt dương.

c. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt âm.

Bài 12: Xác định m để phương trình:

$$x^3 - (m + 1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m - 1) = 0$$

có 2 nghiệm phân biệt.

Bài 13: Cho phương trình: $2x^3 + 2(6m - 1)x^2 - 3(2m - 1)x - 3(1 + 2m) = 0$.

Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt có tổng bình phương bằng 28.

Bài 14: Giải các phương trình:

a. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$.

b. $x^4 - 6x^3 - x^2 + 54x - 72 = 0$.

c. $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 8x + 8 = 0$.

d. $2x^4 - 13x^3 + 20x^2 - 3x - 2 = 0$.

Bài 15: Giải các phương trình:

a. $x^4 - 3x^2 - 4x - 3 = 0$.

b. $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$.

Bài 16: Cho phương trình: $mx^4 - (m + 2)x^3 + 2(1 - 2m)x^2 + 4(2 + m)x - 8 = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 2$.

b. Xác định m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.

c. Xác định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 17: Cho phương trình: $mx^4 - 6mx^3 + (2 + 11m)x^2 - 6(m + 1)x + 4 = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Xác định m để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

c. Xác định m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.

d. Xác định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 18: Cho phương trình: $x^4 - 4mx^3 + 4(m^2 - 1)x^2 + 12x - 9 = 0$.

a. Xác định m để phương trình có đúng 1 nghiệm.

b. Xác định m để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.

c. Xác định m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.

d. Xác định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 19: Giải các phương trình sau:

a. $x^4 - x^2 - 2 = 0$.

b. $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

c. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

d. $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$.

Bài 20: Cho phương trình: $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0$.

Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 21: Giải các phương trình:

a. $x - \sqrt{2x+3} = 0$.

b. $\sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+3}$.

c. $\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{x-1}$.

Bài 22: Giải các phương trình:

a. $x^2 + \sqrt{x^2+11} = 31$.

b. $(x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2+3x}$.

c. $\sqrt{(x+1)(2-x)} = 1 + 2x - 2x^2$.

Bài 23: Giải các phương trình:

a. $\sqrt{x^2-3x+3} + \sqrt{x^2-3x+6} = 3$.

b. $\sqrt{2x^2+5x+2} - 2\sqrt{2x^2+5x-6} = 1$.

Bài 24: Giải phương trình:

a. $\sqrt{x^2+3x+2} - 2\sqrt{2x^2+6x+2} = -\sqrt{2}$.

b. $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 2$.

Bài 25: Giải phương trình $(x-3)(x+1) + 4(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = -3$.

Bài 26: Giải phương trình: $2\sqrt[n]{(1+x)^2} - 3\sqrt[n]{1-x^2} + \sqrt[n]{(1-x)^2} = 0$, với n chẵn.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1.

a. Điều kiện $x \neq \pm 1$. Biến đổi phương trình về dạng:

$x + 1 - (x-1) = (x-1)(x+1) \Leftrightarrow 2 = x^2 - 1$

$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$, thoả mãn điều kiện .

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{3}$.

b. Điều kiện $x \neq 1$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{9(x^2+x+1)}{x^2-x+1} = \frac{7(x+1)}{x-1} \Leftrightarrow 9(x-1)(x^2+x+1) = 7(x+1)(x^2-x+1)$$

$\Leftrightarrow 9(x^3-1) = 7(x^3+1) \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$, thoả mãn điều kiện .

Vậy, phương trình có nghiệm x =2.

Bài 2.

a. Điều kiện: $x^2 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$.

Đặt $t = x^2 - 2x$, phương trình được biến đổi thành:

$$\frac{t-1}{6} - \frac{1}{t} = 0 \Leftrightarrow \frac{t-1}{6} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t(t-1) = 6 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x = 3 \\ x^2 - 2x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 3$.

b. Đặt $t = x^2 - 3x + 4$, phương trình được biến đổi thành:

$$\frac{2}{t-1} + \frac{1}{t} = \frac{15}{2(t+1)} \Leftrightarrow 4t(t+1) + 2(t-1)(t+1) = 15t(t-1) \Leftrightarrow 9t^2 - 19t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \frac{1}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 4 = 2 \\ x^2 - 3x + 4 = \frac{1}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 - 3x + \frac{35}{9} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 2$.

Bài 3. Chia cả tử và mẫu cho x hoặc x^2.

Bài 4. Chia cả tử và mẫu cho x.

Bài 5. Thêm vào hai lần tích (2ab).

Bài 6.

a. $a \neq 0$ và $b \neq 0$ và $a \neq \pm b$.

b. Với mọi a, b không đồng thời bằng không.

Bài 7.

a. Biến đổi phương trình về dạng: $(x-1)(4x^2 - 5x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1/4 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{1}{4}$.

b. Biến đổi phương trình về dạng: $(x-1)(2x^2 + 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1/2 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có ba nghiệm $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ và $x = -2$.

c. Biến đổi phương trình về dạng: $(x+1)(2x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = -1$.

d. Biến đổi phương trình về dạng: $(x+1)(2x^2 + 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -1/2 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có ba nghiệm $x = -1$, $x = -\frac{1}{2}$ và $x = -2$.

e. Biến đổi phương trình về dạng: $(x-2)(2x^2+4x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{-2\pm\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có ba nghiệm $x=2, x=\dfrac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$.

f. Biến đổi phương trình về dạng:

$$8x^3-4x^2+10x-5=0 \Leftrightarrow (2x-1)(4x^2+5)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$.

Bài 8. Biến đổi phương trình về dạng: $(x-1)(x^2-2ax+a^2-b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=a\pm\sqrt{b} \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có ba nghiệm $x=1, x=a\pm\sqrt{b}$.

). Biến đổi phương trình về dạng:

$$(x+1)[mx^2+2(m-2)x+m-3]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ g(x)=mx^2+2(m-2)x+m-3=0 \ (2) \end{array}\right. \quad (I)$$

a. Với $m=3$, hệ (I) có dạng: $\left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ 3x^2+2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2/3 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt $x=-1, x=0, x=-\dfrac{2}{3}$.

b. Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt không dương

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt không dương $(x_1<x_2\le 0)$ khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'_g>0 \\ P\ge 0 \\ S<0 \\ g(-1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 4-m>0 \\ \dfrac{m-3}{m}\ge 0 \\ -\dfrac{m-2}{m}<0 \\ 1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3\le m<4.$$

Vậy, với $3\le m<4$ phương trình có ba nghiệm phân biệt không dương.

Bài 10. *Hướng dẫn*: Biến đổi phương trình về dạng:

$$(x-1)[x^2-(2m-1)x-m+1]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ g(x)=x^2-(2m-1)x-m+1=0 \quad (2) \end{array}\right. \quad (I)$$

a. Phương trình có đúng 1 nghiệm:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2)\text{ vô nghiệm}\\(2)\text{ nghiệm kép bằng 1}\end{array}\right.$$

b. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2)\text{ có hai nghiệm phân biệt và nhận } x=1 \text{ làm 1 nghiệm}\\(2)\text{ nghiệm kép khác 1}\end{array}\right.$$

c. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt:

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Bài 11. *Hướng dẫn*: Biến đổi phương trình về dạng:

$$(x-m)(x^2-mx+m^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-m=0\\g(x)=x^2-mx+m^2-1=0 \quad (2)\end{array}\right. \qquad (I)$$

a. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt:

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác m.

b. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt dương:

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt dương khác m và $m > 0$.

c. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt âm:

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt âm khác m và $m < 0$.

Bài 12. *Hướng dẫn*:

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(x+m)[x^2-(2m+1)x+2(m-1)]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+m=0\\g(x)=x^2-(2m+1)x+2(m-1)=0 \quad (2)\end{array}\right. \qquad (I)$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2)\text{ có hai nghiệm phân biệt và nhận } x=-m \text{ làm nghiệm}\\(2)\text{ nghiệm kép khác } -m\end{array}\right.$$

Bài 13. Biến đổi phương trình về dạng:

$$(x-1)[2x^2+12mx+3(1+2m)]=0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\f(x)=2x^2+12mx+3(1+2m)=0 \quad (2)\end{array}\right.$$

Trước hết, phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\Delta_f > 0\\f(1)\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}36m^2-12m-6>0\\17+6m\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>\dfrac{1+\sqrt{7}}{6}\\-\dfrac{17}{6}\neq m<\dfrac{1-\sqrt{7}}{6}\end{array}\right.$$

Khi đó: (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -6m \\ x_1.x_2 = \dfrac{3(1+2m)}{2} \end{cases}$.

Tổng bình phương hoành độ các cực trị bằng 28

$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 1^2 = 28 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 27 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 27$

$\Leftrightarrow 36m^2 - 3(1 + 2m) = 27 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{1}{12} \text{ (l)} \end{array}\right.$.

Vậy, với m = 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 14:

a. Nghiệm $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$.

b. Nghiệm $x = -3, x = 2, x = 3, x = 4$.

c. Nghiệm $x = \pm 2, x = 1 \pm \sqrt{3}$.

d. Nghiệm $x = 2, x = \dfrac{1}{2}, x = 2 \pm \sqrt{5}$.

Bài 15:

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^2 + 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - (x + 2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - x - 3)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 3 = 0 \\ x^2 + x + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

b. *Hướng dẫn*: Biến đổi phương trình về dạng:

$(x^4 - 4x^3 + 4x^2) - (x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 - (x + 1)^2 = 0.$

Bài 16: Biến đổi phương trình về dạng:

$(x - 1)(x - 2)(x + 2)(mx - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ mx - 2 = 0 \quad (*) \end{array}\right.$.

Bài 17: *Hướng dẫn*: Biến đổi phương trình về dạng:

$(x - 1)(x - 2)(mx^2 - 3mx + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ mx^2 - 3mx + 2 = 0 \quad (*) \end{array}\right.$.

Bài 18: *Hướng dẫn*: Biến đổi phương trình về dạng $(x^2 - 2mx)^2 - (2x - 3)^2 = 0$.

Bài 19:

a. Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = -1 \ (l) \\ t = 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}\,.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

b. Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$4t^2 - 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{4} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2 = 1 \\ x^2 = \dfrac{1}{4} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \pm 1 \\ x = \pm\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm phân biệt là $x_{1,2} = \pm 1$ và $x_{3,4} = \pm\,\dfrac{1}{2}$.

c. Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 1 \\ t = 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2 = 1 \\ x^2 = 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm phân biệt là $x_{1,2} = \pm 1$ và $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$.

d. Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 2 - \sqrt{3} \\ t = 2 + \sqrt{3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2 = 2 - \sqrt{3} \\ x^2 = 2 + \sqrt{3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \pm\sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ x = \pm\sqrt{2 + \sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Vậy, phương trình có bốn nghiệm phân biệt là:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ và } x_{3,4} = \pm\sqrt{2 + \sqrt{3}}\,.$$

Bài 20: Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$t^2 - 2(m + 1)t + 2m + 1 = 0. \qquad (2)$$

Phương trình ban đầu có bốn nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương $0 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 2m - 1 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \neq 0.$$

Vậy, với $-\dfrac{1}{2} < m \neq 0$ phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Bài 21:

a. Phương trình được biến đổi tương đương:

$$\sqrt{2x+3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x+3 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 3$.

b. Điều kiện: $\begin{cases} 3x+4 \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$

Phương trình được chuyển về dạng:

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{3x+4} \Leftrightarrow (x+3) + (2x+1) + 2\sqrt{(x+3)(2x+1)} = 3x+4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(2x+1)} = 0 \Leftrightarrow (x+3)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$.

c. Điều kiện: $\begin{cases} 5x-1 \geq 0 \\ 3x-2 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{5x-1} = \sqrt{x-1} + \sqrt{3x-2} \Leftrightarrow 5x - 1 = x - 1 + 3x - 2 + 2\sqrt{(x-1)(3x-2)}$$

$$\Leftrightarrow x + 2 = 2\sqrt{(x-1)(3x-2)} \Leftrightarrow (x+2)^2 = 4(x-1)(3x-2)$$

$$\Leftrightarrow 11x^2 - 24x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (vì } x = \frac{2}{11} \text{ loại).}$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = 2$.

Bài 22: *Hướng dẫn*:

a. Viết lại phương trình dưới dạng: $x^2 + 11 + \sqrt{x^2+11} = 20$.

Đặt $t = \sqrt{x^2+11}$, điều kiện $t \geq \sqrt{11}$. Khi đó, phương trình có dạng: $t^2 + t - 20 = 0$.

b. Viết lại phương trình dưới dạng: $-(x^2 + 3x - 10) = 3\sqrt{x^2+3x}$.

Đặt $t = \sqrt{x^2+3x}$, điều kiện $t \geq 0$. Khi đó, phương trình có dạng: $t^2 + 3t - 10 = 0$.

c. Viết lại phương trình dưới dạng: $\sqrt{1+x-x^2} = 2(1 + x - x^2) - 1$.

Đặt $t = \sqrt{1+x-x^2}$, điều kiện $t \geq 0$. Khi đó, phương trình có dạng $2t^2 - t - 1 = 0$.

Bài 23:

a. Đặt $t = x^2 - 3x + 3$. Khi đó phương trình có dạng:

$$\sqrt{t} + \sqrt{t+3} = 3 \Leftrightarrow t + t + 3 + 2\sqrt{t(t+3)} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{t(t+3)} = 3 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - t \geq 0 \\ t(t+3) = (3-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 3 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$, $x = 2$.

Bài 24: *Học sinh tự làm.*

Bài 25: Điều kiện: $\dfrac{x+1}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$ (*)

Đặt $t = (x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}$, suy ra $(x-3)(x+1) = t^2$.

Khi đó phương trình có dạng: $t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = -1 \end{array}\right.$.

- Với $t = -3$, ta được: $(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 < 0 \\ (x-3)(x+1) = 9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x^2 - 2x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x = 1 \pm \sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{13}.$$

- Với $t = -1$, ta được:

$$(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 < 0 \\ (x-3)(x+1) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{5}.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1 - \sqrt{13}$ và $x = 1 - \sqrt{5}$.

Bài 26: Nhận xét rằng $x = \pm 1$ không phải là nghiệm của phương trình, chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt[n]{(1-x)^2} \neq 0$, ta được: $2\sqrt[n]{\dfrac{1+x}{1-x}} - 3\sqrt[n]{\dfrac{1-x}{1+x}} + 1 = 0$.

Nhận xét rằng: $\sqrt[n]{\dfrac{1+x}{1-x}} \cdot \sqrt[n]{\dfrac{1-x}{1+x}} = 1$, nên nếu đặt $t = \sqrt[n]{\dfrac{1+x}{1-x}}$, điều kiện $t \geq 0$, suy ra $\sqrt[n]{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{1}{t}$. Khi đó, phương trình có dạng:

$$2t - \frac{3}{t} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3/2 \text{ loại} \end{array}\right.$$

- Với $t = 1$, ta được: $\sqrt[n]{\dfrac{1+x}{1-x}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1-x} = 1 \Leftrightarrow 1 + x = 1 - x \Leftrightarrow x = 0$.

CHỦ ĐỀ 7

GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Trước hết các em cần ôn lại kiến thức của phương pháp giải toán bằng cách:

1. Lập phương trình bậc nhất một ẩn.
2. Lập hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Để giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc hai một ẩn, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Lập phương trình.

- Chọn ẩn và xác định điều kiện thích hợp cho ẩn. Chú ý phải ghi rõ đơn vị của ẩn
- Biểu thị các đại lượng chưa biết khác theo ẩn.
- Dựa vào các dữ kiện và điều kiện của bài toán để lập phương trình.

Bước 2: Giải phương trình.

Bước 3: Thử lại, nhận định kết quả và trả lời.

Các bài toán được đưa ra thường rơi vào một trong 5 dạng sau:

Dạng 1: Bài toán chuyển động.

Dạng 2: Bài toán về số và chữ số.

Dạng 3: Bài toán vòi nước.

Dạng 4: Bài toán có nội dung hình học.

Dạng 5: Bài toán về phần trăm – năng suất.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Ví dụ 1: *Một đoàn xe vận tải dự định điều số xe cùng loại để vận chuyển 40 tấn hàng. Lúc sắp khởi hành, đoàn xe được giao thêm 14 tấn nữa. Do đó phải điều thêm 2 xe cùng loại và mỗi xe ban đầu phải chở thêm nửa tấn nữa. Tính số xe phải điều theo dự định.*

Giải

1. ***Lập phương trình***

a. Lựa chọn ẩn

- Gọi x là số xe phải điều theo dự định, điều kiện $0 < x \in N$.

b. Thiết lập hai phương trình

Với giả thiết:

- Với x xe vận chuyển 40 tấn hàng, suy ra mỗi xe phải chở số hàng theo dự định bằng $\frac{40}{x}$.

- Vì đoàn xe phải nhận thêm 14 tấn hàng nên số hàng lúc sau là:
$$40 + 14 = 54.$$
- Vì đoàn xe phải điều thêm 2 xe nên số xe lúc sau là $x + 2$ và mỗi xe phải chở số hàng lúc sau bằng $\frac{54}{x+2}$.
- Vì mỗi xe phải chở thêm nửa tấn nên ta có phương trình:
$$\frac{40}{x} + \frac{1}{2} = \frac{54}{x+2}$$

2. ***Giải phương trình***

$$80(x + 2) + x(x + 2) - 108x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 26x + 160 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 10 \\ x_2 = 16 \end{array}\right.$$

3. ***Kết luận***: Vậy, số xe dự định phải điều là 10 xe hoặc 16 xe.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên ta thấy:
- Chúng ta lựa chọn ẩn x cho giá trị cần tìm là số xe phải điều.
- Việc thiết lập phương trình dựa trên phép so sánh khối lượng mỗi xe phải chở.
- Lời giải được trình bày thành ba phần độc lập nhau, với mục đích minh hoạ để giúp các em học sinh hiểu được cách trình bày bài toán theo thuật toán đã được chỉ ra. Tuy nhiên, kể từ các ví dụ sau chúng ta không cần phân tách như vậy mà chỉ yêu cầu các em học sinh khi đọc phải biết mình đang ở bước nào.

Ví dụ 2: (Bài 65/tr 65 – Sgk): *Một xe lửa đi từ Hà Nội vào Bình Sơn (Quảng Ngãi). Sau đó* 1 giờ, *một xe lửa khác đi từ Bình Sơn ra Hà Nội với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe lửa thứ nhất là* 5km/h. *Hai xe gặp nhau tại một ga ở chính giữa quãng đường. Tìm vận tốc của mỗi xe, giả thiết rằng quãng đường Hà Nội – Bình Sơn dài* 900km.

Giải

Gọi x là vận tốc của xe lửa đi từ Hà Nội ($x > 0$; đơn vị: km/h)

Vận tốc xe lửa đi từ Bình Sơn là $x + 5$.

Hai xe gặp nhau tại một ga ở chính giữa quãng đường.

Do đó, ta có phương trình:

$$\frac{450}{x} = \frac{450}{x+5} + 1 \Leftrightarrow 450(x + 5) = 450x + x(x + 5)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 2250 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 45 \\ x = -50 \ \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy, vận tốc của hai xe lửa là 45km/h và 50km/h.

Ví dụ 3: (Bài 52/tr 60 – Sgk): *Khoảng cách giữa hai bến sông* A *và* B *là* 30km. *Một canô đi từ bến* A *đến bến* B, *nghỉ* 40 *phút ở bến* B *rồi quay lại bến* A. *Kể từ lúc khởi hành đến khi về tới bến* A *hết tất cả* 6 giờ. *Hãy tìm vận tốc của canô trong nước yên lặng, biết rằng vận tốc của nước chảy là* 3km/h.

Giải

Đổi: 40 phút = $\frac{2}{3}$ giờ.

Gọi x là vận tốc của canô đi trong nước yên lặng (x > 3; đơn vị: km/h).

Suy ra, vận tốc của canô đi xuôi theo dòng nước là x + 3 và đi ngược dòng là x – 3.

Ta có phương trình:

$$\frac{30}{x+3}+\frac{30}{x-3}+\frac{2}{3}=6 \Leftrightarrow 4x^2-45x-36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=-3/4 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy, vận tốc thực của canô là 12km/h.

Ví dụ 4: (Bài 43/tr 58 – Sgk): *Một xuồng du lịch đi từ thành phố Cà Mau đến Đất Mũi theo một đường sông dài* 120km. *Trên đường đi, xuồng có nghỉ lại* 1 giờ *tại thị trấn Năm Căn. Khi về, xuồng đi theo đường khác dài hơn đường lúc đi là* 5 km *với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lúc đi là* 5km/h. *Tính vận tốc của xuồng lúc đi, biết rằng thời gian về bằng thời gian đi.*

Giải

Gọi vận tốc lúc xuồng đi là x (x > 5, đơn vị: km/h).

Suy ra, vận tốc lúc xuồng về là x – 5 (km/h).

Thời gian chạy xuồng lúc đi (không kể thời gian nghỉ) là $\frac{120}{x}$.

Thời gian chạy xuồng lúc về là $\frac{125}{x-5}$.

Ta có phương trình:

$$\frac{125}{x-5}=\frac{120}{x}+1 \Leftrightarrow 125x=120(x-5)+x(x-5)$$

$$\Leftrightarrow x^2-10x-600=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=30 \\ x=-20 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy, vận tốc của xuồng lúc đi là 30km/h.

Ví dụ 5: *Hai bến sông* A *và* B *cách nhau* 40 km. *Cùng một lúc với canô đi xuôi từ* A *có một chiếc bè trôi từ* A *với vận tốc* 3km/h. *Sau khi đến* B *canô trở về bến* A *ngay và gặp bè khi đã trôi được* 8 km. *Tính vận tốc riêng của canô. Biết vận tốc của canô không thay đổi.*

Giải

Một chiếc bè trôi với vận tốc 3 km/h, tức là vậy vận tốc dòng nước là 3 km/h.

Gọi vận tốc riêng của canô là x (x > 0, km/h).

Từ giả thiết, suy ra:

- Vận tốc canô đi xuôi dòng là: x + 3.
- Vận tốc canô đi ngược dòng là: x – 3.

Vậy thời gian canô đi xuôi từ A đến B là: $\frac{40}{x+3}$.

Khi đi từ B trở về A, canô gặp bè đã trôi được 8 km, suy ra:

- Thời gian để bè trôi được 8 km là: $\frac{8}{3}$.
- Quãng đường từ B đến chỗ gặp bè là: 40 – 8 (km)

Vậy thời gian canô đi từ B đến chỗ gặp bè là: $\frac{32}{x-3}$

Nhận thấy rằng, canô và bè cùng khởi hành một lúc và thời gian chuyển động của hai vật đến chỗ gặp là như nhau.

Vậy ta có phương trình:

$$\frac{40}{x+3}+\frac{32}{x-3}=\frac{8}{3}\Leftrightarrow 120(x-3)+96(x+3)-8(x+3)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow 8x^2-216x=0\Rightarrow x=27.$$

Vậy, vận tốc thực của canô là 27 km/h.

Ví dụ 6: *Một người đi xe máy trên quãng đường* AB *dài* 120 km *với vận tốc định trước. Sau khi đi được* $\frac{1}{3}$ *quãng đường với vận tốc đó, người lái xe tăng vận tốc thêm* 10 km/h *trên quãng đường còn lại. Tìm vận tốc dự định và thời gian xe lăn bánh trên đường. Biết người đó đến* B *sớm hơn dự định* 24 phút.

Giải

Đổi 24 phút = $\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$ (giờ).

Gọi vận tốc dự định của người đi xe máy là x (x > 0, km/h).

Suy ra, thời gian dự định để đi hết quãng đường AB là: $\frac{120}{x}$ (giờ).

Với giả thiết:

- Thời gian người đi xe máy đi hết $\frac{1}{3}$ quãng đường (tương ứng với $\frac{120}{3}$ = 40 km) là: $\frac{40}{x}$ (giờ).

- $\frac{2}{3}$ quãng đường còn lại người đó tăng vận tốc thêm 10 km/h nên thời gian người đi xe máy đi hết $\frac{2}{3}$ quãng đường là: $\frac{80}{x+10}$ (giờ).
- Do người đó đến B sớm hơn dự định 24 phút nên ta có phương trình:

$$\frac{120}{x} = \frac{40}{x} + \frac{80}{x+10} + \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow 120.5(x+10) = 40.5(x+10) + 80.5x + 2x(x+10)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 20x + 4000 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 40 \\ x = -50 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy, ta được:

- Vận tốc dự định là 40 km/h và thời gian dự định là $\frac{120}{40} = 3$giờ.
- Thời gian xe lăn bánh trên đường là thời gian dự định trừ thời gian đến sớm bằng: $3 - \frac{2}{5} = 2\frac{3}{5}$ (giờ) = 2 giờ 36 phút.

Vấn đề 2: BÀI TOÁN VỀ SỐ VÀ CHỮ SỐ

Ví dụ 1: (Bài 41/tr 58 – Sgk): *Trong lúc học nhóm, bạn Hùng yêu cầu bạn Minh và bạn Lan mỗi người chọn một số sao cho hai số này hơn kém nhau là 5 và tích của chúng phải bằng 150. Vậy hai bạn Minh và Lan phải chọn những số nào?*

Giải

Gọi x là số Minh chọn, thì số Lan chọn là $x - 5$ ($x \in R$)

Ta có phương trình: $x(x-5) = 150 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 150 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -10 \\ x = 15 \end{array}\right.$

Vậy, Lan và Minh có thể chọn một trong hai cặp số (10 ; 15) hoặc (–10 ; –15)

Chú ý: Ta cũng có thể gọi các số cần tìm là x và x + 5.

Kết quả ta cũng có hai cặp số (10 ; 15) hoặc (–10 ; –15) thoả mãn điều kiện đề bài.

Ví dụ 2: *Tìm hai số biết hiệu của chúng bằng 8 và tổng các bình phương của chúng bằng 424.*

Giải

Gọi số thứ nhất là x.

Với giả thiết:

- Hiệu của chúng bằng 8 nên ta có số thứ hai là x + 8.

- Tổng bình phương của hai số bằng 424 nên ta có phương trình:

$$x^2 + (x + 8)^2 = 424 \Leftrightarrow 2x^2 + 16x - 360 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 10 \\ x_2 = -18 \end{array}\right.$$

Vậy, ta được:

- Nếu số thứ nhất là 10 thì số thứ hai bằng 18.
- Nếu số thứ nhất là −18 thì số thứ hai bằng −10.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên ta thấy:

1. Cho dù bài toán yêu cầu chúng ta đi tìm hai số (điều này có thể khiến học sinh hiểu theo hướng cần hai ẩn) nhưng cần hiểu rằng, số thứ hai được xác định thông qua số thứ nhất (bởi hiệu giữa chúng bằng 8). Do đo, chúng ta lựa chọn ẩn x cho số thứ nhất và dễ thấy số thứ hai là x + 8.
2. Việc thiết lập phương trình là đơn giản, khi đã có được hai số cần tìm.
3. Với nhận định trong 1, bài toán có thể được giải thông qua hệ hai ẩn x, y (với x là số thứ nhất và y là số thứ hai), cụ thể:

- Hiệu của chúng bằng 8 nên: $x - y = 8$. (1)
- Tổng bình phương của hai số bằng 424 nên: $x^2 + y^2 = 424$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 8 \\ x^2 + y^2 = 424 \end{cases}$.

Học sinh tự giải bằng cách chuyển về phương trình bậc hai.

Ví dụ 3: (Bài 64/tr 64 – Sgk): *Bài toán yêu cầu tìm tích của một số dương với một số lớn hơn nó 2 đơn vị nhưng bạn Quân nhầm đầu bài lại tính tích của một số dương với một số bé hơn nó 2 đơn vị. Kết quả của bạn Quân là 120. Hỏi nếu làm đúng đầu bài đã cho thì kết quả phải là bao nhiêu?*

✍ *Giải*

Gọi x là số dương cần tìm.

Theo Quân thì x thoả mãn phương trình:

$$x(x - 2) = 120 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 120 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12 \\ x = -10 \ \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy, số dương cần tìm đó là 12 và nếu làm đúng thì kết quả là:

$$12.(12 + 2) = 168.$$

Ví dụ 4: (Bài 44/tr 59 – Sgk): *Đố em tìm được một số mà một nửa của nó trừ đi một nửa đơn vị rồi nhân với một nửa của nó bằng một nửa đơn vị.*

Giải

Gọi x là số phải tìm. Ta có phương trình:

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Vậy, có hai số thoả mãn điều kiện.

Ví dụ 5: (Bài 45/tr 59 – Sgk): *Tích của hai số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là* 109. *Tìm hai số đó.*

Giải

Gọi x là số tự nhiên thì số kế tiếp của nó là x + 1 (x ∈ N).

Ta có phương trình:

$$x(x+1)=x+x+1+109 \Leftrightarrow x^2-x-110=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=11 \\ x=-10 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy, hai số tự nhiên liên tiếp cần tìm là 11 và 12.

Ví dụ 6: *Một lớp học được nhà trường phát phần thưởng ba lần và chia đều cho các em học sinh. Lần thứ nhất chia hết* 66 *quyển vở nhưng vắng* 5 *em, lần thứ hai chia hết* 125 *quyển vở nhưng vắng* 2 *em còn lần thứ ba thì không vắng em nào và chia hết* 216 *quyển vở. Biết rằng học sinh có mặt cả ba lần đã nhận được số vở (trong lần ba) bằng tổng số vở đã nhận trong hai lần đầu. Tính số học sinh.*

Giải

Gọi số học sinh là x (x > 0, em). Trong lần phát phần thưởng thứ nhất:

- Số học sinh được nhận vở là: x – 5.
- Và mỗi em được nhận: $\frac{66}{x-5}$

Trong lần phát phần thưởng thứ hai:

- Số học sinh được nhận vở là: x – 2.
- Và mỗi em được nhận: $\frac{125}{x-2}$

Trong lần phát phần thưởng thứ ba:

- Số học sinh được nhận vở là: x.
- Và mỗi em được nhận: $\frac{216}{x}$.

Biết một học sinh có mặt cả ba lần đã nhận được số vở (trong lần ba) bằng tổng số vở đã nhận trong hai lần đầu nên ta có phương trình:

$$\frac{66}{x-5}+\frac{125}{x-2}=\frac{216}{x}\Leftrightarrow 66x(x-2)+125x(x-5)-216(x-2)(x-5)$$

$$\Leftrightarrow 25x^2-755x+2160=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{16}{5}\ \text{(loại)} \\ x=27 \end{array}\right.$$

Vậy, trong lớp có 27 em học sinh.

Vấn đề 3: BÀI TOÁN VÒI NƯỚC

Ví dụ 1: *Có hai vòi nước. Người ta mở vòi thứ nhất cho nước chảy đầy một bể cạn rồi khoá lại. Sau đó mở vòi thứ hai cho nước chảy ra hết với thời gian lâu hơn so với thời gian vòi một chảy là* 4 giờ. *Nếu cùng mở cả hai vòi thì bể đầy sau* 19 giờ 15 phút. *Hỏi vòi thứ nhất chảy trong bao lâu mới đầy bể khi vòi hai khoá lại.*

Giải

Ta thực hiện đổi đơn vị: 19 giờ 15 phút $= 19\frac{15}{60}=\frac{77}{4}$

Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy đầy bể là x (giờ), điều kiện $x>0$.

Suy ra, mỗi giờ vòi một chảy vào bể được: $\frac{1}{x}$ (bể)

Với giả thiết:

- Thời gian vòi thứ hai chảy cạn bể là: $x+4$, suy ra mỗi giờ vòi hai chảy ra được: $\frac{1}{x+4}$ (bể).
- Nếu mở cả hai vòi thì sau 19 giờ 15 phút mới đầy bể, suy ra mỗi giờ cả hai vòi cùng chảy thì được: $\frac{1}{77/4}=\frac{4}{77}$ (bể).

Từ đó, ta có phương trình:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}=\frac{4}{77}\Leftrightarrow 77(x+4)-77x-4x(x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+16x-308=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-11\ \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy, sau 7 giờ thì vòi thứ nhất chảy đầy bể khi vòi hai khóa.

☞ ***Chú ý***: Trong bài toán trên, các em học sinh cần lưu ý:

- Vòi thứ nhất chảy để cho nước vào bể.
- Vòi thứ hai chảy để lấy nước từ bể ra.

Do đó khi lập phương trình ta phải lấy thời gian của vòi thứ nhất trừ thời gian của vòi thứ hai: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} = \frac{4}{77}$.

Còn trong trường hợp cả hai vòi cùng chảy vào bể thì ta có:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{4}{77}.$$

Vấn đề 4: BÀI TOÁN CÓ NỘI DUNG HÌNH HỌC

Ví dụ 1: (Bài 46/tr 59 – Sgk): *Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích* $240m^2$. *Nếu tăng chiều rộng* 3m *và giảm chiều dài* 4m *thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính kích thước của mảnh đất.*

Giải

Gọi x là chiều dài hình chữ nhật ($x > 4$; đơn vị: mét)

Suy ra, chiều rộng hình chữ nhật là $\frac{240}{x}$.

Ta có phương trình:

$$(x-4)\left(\frac{240}{x}+3\right) = 240 \Leftrightarrow (x-4)(240+3x) = 240x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 12x - 960 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 20 \\ x = -16 \ \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy, hình chữ nhật có chiều dài là 20m và chiều rộng là 12m.

Ví dụ 2: *Tính chiều dài và chiều rộng của một hình chữ nhật. Biết hình chữ nhật đó có chu vi bằng* 340m *và diện tích bằng* $7200m^2$.

Giải

- Gọi chiều dài của hình chữ nhật là x ($x > 0$, m).
- Gọi chiều rộng của hình chữ nhật là y ($0 < y < x$, m).

Do hình chữ nhật đó có chu vi bằng 340m và diện tích bằng $7200m^2$ nên ta có hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{l} 2(x+y) = 340 \\ xy = 7200 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y = 170 \\ xy = 7200 \end{array}\right.$

Theo định lí Viét, x và y là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 170X + 7200 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 80 \\ X = 90 \end{array}\right.$$

Vậy, hình chữ nhật có chiều dài bằng 90 m và chiều rộng bằng 80 m.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên ta thấy:

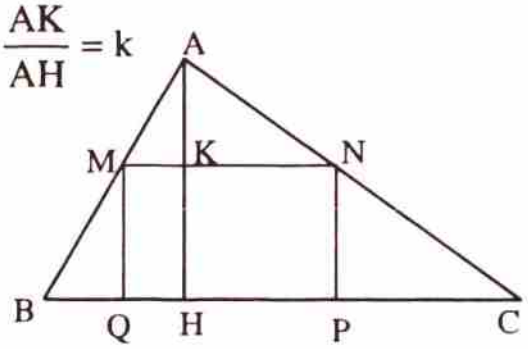
- Với hai giá trị phải tìm chúng ta lựa chọn nó cho hai ẩn tương ứng. Từ đó, cần đi thiết lập một hệ hai phương trình theo hai ẩn đó.
- Hệ phương trình được giải nhờ hệ thức Viét.

Ví dụ 3: (Bài 66/tr 64 – Sgk): *Cho* ΔABC *có* BC = 16cm, *đường cao* AH = 12cm *Một hình chữ nhật* MNPQ *có đỉnh* M *thuộc cạnh* AB, *đỉnh* N *thuộc cạnh* AC *còn hai đỉnh* P *và* Q *thuộc cạnh* BC. *Xác định vị trí của điểm* M *trên cạnh* AB *sao cho diện tích của hình chữ nhật đó bằng* $36cm^2$.

Giải

Ta có: $S_{MNPQ} = MN.NP = MN(AH - AK) \Rightarrow MN(AH - AK) = 36$ (1)

Lại có $\Delta AMN \backsim \Delta ABC$ nên: $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{AK}{AH} = k$



$\Rightarrow$ MN = k.NC = 16k

AK = k.AH = 12k

Thay vào (1), ta được:

$$16k(12 - 12k) = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1/4 \\ k = 3/4 \end{array}\right.$$

Vậy, điểm M cần chọn trên cạnh AB sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$ hoặc $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{4}$.

Ví dụ 7: *Cho một thửa ruộng hình chữ nhật, một người đi theo chiều dài hết* 1 phút 5 giây, *đi theo chiều rộng hết* 39 giây. *Người ta làm một lối đi xung quanh thửa ruộng rộng* 1,5 m *thì diện tích còn lại là* 5529 m^2. *Tính kích thước của thửa đất.*

Giải

Đổi:1 phút 5 giây = 65 giây.

Gọi chiều dài của thửa ruộng là x (x > 0, m).

Gọi chiều rộng của thửa ruộng là y (y > 0, m).

Một người đi bộ theo chiều dài hết 65 giây, theo chiều rộng hết 39 giây nên ta có tỉ số: $\frac{x}{y} = \frac{65}{39} = \frac{5}{3}$. (1)

Người ta làm một lối đi xung quanh thửa ruộng rộng 1,5 m do đó:

- Chiều dài còn lại là: x - 2×1,5 = x - 3.
- Chiều rộng còn lại là: y - 2×1.5 = y - 3.

Biết diện tích còn lại là 5529 m^2 nên ta có phương trình:

(x - 3)(y - 3) = 5529 (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \\ (x-3)(y-3) = 5529 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x = \frac{5y}{3} & (3) \\ (x-3)(y-3) = 5529 & (4) \end{array}\right.$$

Thay (3) vào (4), ta được:

$$\left(\frac{5y}{3}-3\right)(y-3)=5529 \Leftrightarrow (5y-9)(y-3)=16587.$$

$$\Leftrightarrow 5y^2-24x-16560=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=60 \\ y=-\dfrac{276}{5} \quad \text{(loại)} \end{array}\right. \Rightarrow x=100.$$

Vậy, thửa ruộng có chiều rộng bằng 60 m và chiều dài bằng 100 m.

Vấn đề 5: BÀI TOÁN VỀ PHẦN TRĂM – NĂNG SUẤT

Ví dụ 1: (Bài 63/tr 64 – Sgk): *Sau hai năm, số dân của một thành phố tăng từ* 2 000 000 người *lên* 2 020 050 người. *Hỏi trung bình mỗi năm dân số của thành phố đó tăng bao nhiêu phần trăm?*

Giải

Gọi x là tỉ lệ tăng dân số hàng năm của thành phố (x > 0, đơn vị: %).

Suy ra, số dân tăng sau năm thứ nhất là 2000000x.

Do đó, sau năm thứ nhất số dân thành phố là:

$2000000 + 2000000x = 2000000(1 + x)$.

Sau năm thứ hai, số dân của thành phố là $2000000(1 + x)x$.

Ta có phương trình: $2000000(1 + x) + 2000000(1 + x)x = 2020050 \Leftrightarrow x = 0{,}5$.

Vậy, trung bình mỗi năm dân số của thành phố đó tăng thêm 0,5%.

Ví dụ 2: (Bài 49/tr 59 – Sgk): *Hai đội thợ quét sơn một ngôi nhà. Nếu họ cùng làm thì trong 4 ngày xong việc. Nếu họ làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để xong việc?*

Giải

Gọi x là thời gian riêng đội I hoàn thành công việc (x > 0, đơn vị: ngày)

Do đó, thời gian đội II làm riêng là (x + 6) ngày.

Trong 1 ngày:

- Đội I hoàn thành $\frac{1}{x}$ công việc.
- Đội II hoàn thành $\frac{1}{x+6}$ công việc.
- Cả hai đội cùng làm thì hoàn thành $\frac{1}{4}$ công việc.

Từ đó, ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2-2x-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-4 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy, nếu phải làm riêng thì đội I hoàn thành công việc trong 6 ngày và đội II hoàn thành trong 12 ngày.

Ví dụ 3: *Muốn làm xong một việc cần 480 công thợ. Người ta có thể thuê một trong hai nhóm thợ A hoặc B. Biết nhóm A ít hơn nhóm B là 4 người và nếu giao cho nhóm B thì công việc hoàn thành sớm hơn 10 ngày so với nhóm A. Hỏi số người của mỗi nhóm.*

✍ *Giải*

Gọi số người của nhóm A là x (x > 0, người).

Suy ra, số người của nhóm B là: x + 4 (người).

Với giả thiết:

- Nếu thuê nhóm A thì thời gian hoàn thành công việc là: $\frac{480}{x}$.
- Nếu thuê nhóm B thì thời gian hoàn thành công việc là: $\frac{480}{x+4}$.
- Do nhóm B hoàn thành sớm hơn so với nhóm A là 10 ngày nên ta có phương trình: $\frac{480}{x} - 10 = \frac{480}{x+4} \Leftrightarrow 48(x+4) - x(x+4) - 48x$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 192 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12 \\ x = -16 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy, nhóm A có 12 người và nhóm B có 16 người.

☞ ***Chú ý***: Với ví dụ trên, ta có thể gọi x là số người nhóm A và y là số người nhóm B. Sau đó ta thiết lập được hệ phương trình:

$$\begin{cases} y - x = 4 \\ \frac{480}{y} - \frac{480}{x} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 16 \end{cases}.$$

Ví dụ 4: (Bài 42/tr 58 – Sgk): *Bác Thời vay 2 000 000 đồng của ngân hàng để làm kinh tế gia đình trong thời hạn 1 năm. Lẽ ra cuối năm bác phải trả cả vốn lẫn lãi. Song bác đã được ngân hàng cho kéo dài thời hạn thêm 1 năm nữa, số lãi của năm đầu được gộp vào với vốn để tính lãi năm sau và lãi suất vẫn như cũ. Hết hai năm phải trả tất cả là 2 420 000 đồng. Hỏi lãi suất cho vay là bao nhiêu phần trăm trong một năm?*

✍ *Giải*

Gọi x là lãi xuất vay ngân hàng trong một năm (x > 0, đơn vị: %)

Bác Thời vay 2 000 000 đồng của ngân hàng để làm kinh tế gia đình trong thời hạn 1 năm. Do đó, tiền lãi của năm thứ nhất là 2000000x

Vậy, cả tiền vay và tiền lãi phải trả sau 1 năm là:

2000000 + 2000000x = 2000000(x + 1).

Số tiền cả vốn lẫn lãi sau năm thứ hai là:

$2000000(x + 1) + 2000000(x + 1)x = 2000000(x + 1)^2$.

Do đó, ta có phương trình:

$$2000000(x+1)^2 = 2420000 \Leftrightarrow x^2 + 2x - \frac{21}{100} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{10}{100} \\ x = -\dfrac{110}{100} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy, Bác Thời vay với lãi suất 10%.

Ví dụ 5: *Một tổ sản xuất theo kế hoạch phải làm được 720 sản phẩm. Nếu tăng năng xuất lên 10 sản phẩm mỗi ngày thì so với giảm năng xuất đi 20 sản phẩm mỗi ngày thời gian hoàn thành ngắn hơn 4 ngày. Tính năng xuất dự định.*

Giải

Gọi năng xuất dự định là x (x > 0, sản phẩm/ngày).

Nếu tăng năng xuất lên 10 sản phẩm mỗi ngày thì thời gian hoàn thành công việc là: $\frac{720}{x+10}$.

Nếu giảm năng xuất đi 20 sản phẩm mỗi ngày thì thời gian hoàn thành công việc là: $\frac{720}{x-20}$.

Do thời gian chênh lệch là 4 ngày nên ta có phương trình:

$$\frac{720}{x+10} + 4 = \frac{720}{x-20} \Leftrightarrow 720(x-20) + 4(x+10)(x-20) - 720(x+10)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 40x - 22400 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 80 \\ x = -70 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy, năng suất dự định là 80 sản phẩm một ngày.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Tìm hai số biết hiệu của chúng bằng 5 và tổng các bình phương của chúng bằng 125.

Bài 2: Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 25 và hiệu các bình phương của chúng cũng bằng 25.

Bài 3: Lúc 7 giờ sáng một ôtô khởi hành từ A để đến B cách A 120 km. Sau khi đi được $\frac{2}{3}$ quãng đường ôtô dừng lại 20 phút để nghỉ rồi đi chậm hơn trước 8 km/h. Ôtô đến B lúc 10 giờ. Hỏi nó nghỉ lúc mấy giờ ?

Bài 4: Một người đi từ A đến B rồi lại trở về A. Lúc về đi được 30 km người đó nghỉ 20 phút. Sau khi nghỉ xong, người đó đi với vận tốc nhanh hơn trước 6 km/h. Tính vận tốc lúc đi. Biết quãng đường AB dài 90 km và thời gian đi bằng thời gian về kể cả nghỉ.

Bài 5: Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 33 km với vận tốc xác định. Khi từ B về A, người đó đi bằng đường khác dài hơn đường trước 29 km nhưng với vận tốc lơn hơn vận tốc lúc đi 3 km/h. Tính vận tốc lúc đi. Biết thời gian về nhiều hơn thời gian đi là 1 giờ 30 phút.

Bài 6: Một ôtô đi từ A đến B rồi quay trở về A ngay. Sau khi ôtô đi được 15 km thì một người đi xe đạp từ B về A. Tính vận tốc mỗi xe. Biết:

- Quãng đường AB dài 24 km.
- Vận tốc ôtô nhanh hơn xe đạp 37 km.
- Ôtô quay trở về A sớm hơn xe đạp đến B là 44 phút.

Bài 7: Một ôtô dự định đi quãng đường AB dài 60 km. Trong một thời gian nhất định, trên nửa quãng đường AB do đường xấu nên ôtô chỉ đi với vận tốc ít hơn dự định 6 km/h. Để đến B đúng dự định, ôtô phải đi quãng đường còn lại với vận tốc nhanh hơn vận tốc dự định 10 km/h. Tính thời gian dự định đi hết quãng đường.

Bài 8: Một tổ lao động hoàn thành đào đắp 8000 m^3 đất trong một thời gian nhất định. Nếu mỗi ngày vượt mức 50 m^3 thì tổ lao động hoàn thành kế hoạch sớm 8 ngày. Tính thời gian dự định.

Bài 9: Một nông trường phải trồng 75 ha rừng với năng suất đã định từ trước. Nhưng trong thực tế, khi bắt tay vào trồng rừng thì mỗi tuần nông trường trồng thêm được 5 ha. Do vậy, họ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 1 tuần. Tính năng suất dự định của nông trường.

Bài 10: Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280 m. Người ta làm một lối đi xung quanh khu vườn rộng 2 m. Diện tích còn lại là 4256. Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

Bài 11: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước cạn nếu cả hai vòi cùng chảy một lúc thì sau 4 giờ thì đầy bể. Nếu từng vòi chảy một thì thôi gian vòi I chảy nhanh hơn vòi II là 6 giờ. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu đầy bể.

Bài 12: Hai vòi nước cùng chảy vào bể trong 6 giờ 40 phút. Nếu chảy riêng từng vòi một thì mỗi vòi phải chảy trong bao lâu mới đầy bể. Biết rằng vòi thứ hai chảy lâu hơn vòi thứ nhất 3 giờ.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Tham khảo các ví dụ cơ bản trong phần phương pháp giải toán.

PHẦN HÌNH HỌC

CHƯƠNG III – GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

CHỦ ĐỀ 1

GÓC Ở TÂM – SỐ ĐO CUNG

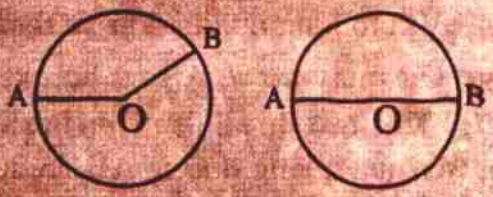
A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. GÓC Ở TÂM ĐƯỜNG TRÒN

Định nghĩa: *Góc ở tâm đường tròn là góc mà đỉnh của nó là tâm của đường tròn.*

Mỗi góc ở tâm cắt đường tròn tại hai điểm, do đó xác định hai cung tròn và có thể xảy ra hai trường hợp:

1. Một cung nhỏ và một cung lớn.
2. Hai cung đều bằng nửa đường tròn.



2. SỐ ĐO CỦA CUNG TRÒN

Định nghĩa: Số đo của cung AB (kí hiệu là sđ $\overset{\frown}{AB}$) được xác định như sau:

- Số đo (độ) của cung nhỏ AB bằng số đo (độ) của góc ở tâm chắn cung đó.
- Số đo (độ) của cung lớn AB bằng 360^0 trừ đi số đo độ cung nhỏ AB.
- Số đo (độ) của nửa đường tròn bằng 180^0.

Định nghĩa: Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:

- Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng số đo (độ).
- Trong hai cung không bằng nhau, cung lớn hơn là cung có số đo (độ) lớn hơn.

3. ĐIỂM NẰM TRÊN CUNG TRÒN

Định lí: Nếu điểm C nằm trên cung AB và chia cung này thành hai cung kí hiệu là $\overset{\frown}{AC}$ và $\overset{\frown}{CB}$ thì ta có: $\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = \text{sđ}\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\overset{\frown}{CB}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: (Bài 1/tr 68 – Sgk): *Kim giờ và kim phút của đồng hồ tạo thành một góc ở tâm có số đo là bao nhiêu độ vào những thời điểm sau:*

a. 3 giờ. b. 5 giờ. c. 6 giờ. d. 12 giờ. e. 20 giờ

Giải

a. 90^0. b. $\frac{360}{12} \times 5 = 150^0$. c. 180^0. d. 0^0. e. $\frac{360}{12} \times 4 = 120^0$.

Ví dụ 2: *Cho đường tròn* (O, R), *dây* AB = R. *Tính số đo hai cung* $\overset{\frown}{AB}$.

Giải

Xét ΔOAB, ta có:

$OA = OB = AB = R \Leftrightarrow \Delta OAB$ đều $\Rightarrow \overset{\frown}{AOB} = 60^0$.

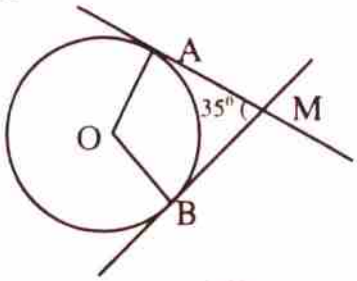
Từ đó, ta được:

- Số đo (độ) của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ bằng 60^0.
- Số đo (độ) của cung lớn $\overset{\frown}{AB}$ bằng $360^0 - 60^0 = 300^0$.

Ví dụ 3: (Bài 5/tr 69 – Sgk): *Hai tiếp tuyến của đường tròn* (O) *tại* A *và* B *cắt nhau tại* M. *Biết* $AMB = 35^0$.

a. *Tính số đo của góc ở tâm tạo bởi hai bán kính* OA, OB.

b. *Tính số đo mỗi cung* AB (*cung lớn và cung nhỏ*).



✍ *Giải*

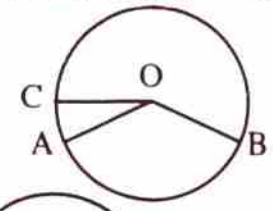
a. Ta có: $\widehat{AOB} + OBM + BMA + \widehat{MAO} = 360^0$

Do đó: $\widehat{AOB} = 360^0 - 90^0 - 90^0 - 35^0 = 145^0$.

b. Ta có: $sđAB_{nhỏ} = 145^0$.

$sđAB_{lớn} = 360^0 - 145^0 = 215^0$.

Ví dụ 4: *Cho đường tròn* (O), *góc ở tâm* $\widehat{AOB} = 120^0$, *góc ở tâm* $\widehat{AOC} = 30^0$. *Tính số đo cung* $\overset{\frown}{BC}$.



✍ *Giải*

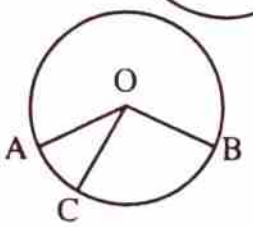
Ta có hai trường hợp:

Trường hợp 1: Điểm C nằm trên cung lớn AB.

Khi đó: $sđ\overset{\frown}{BC} = sđ\overset{\frown}{AB} + sđ\overset{\frown}{AC} = 120^0 + 30^0 = 150^0$.

Trường hợp 2: Điểm C nằm trên cung nhỏ AB.

Khi đó: $sđ\overset{\frown}{BC} = sđ\overset{\frown}{AB} - sđ\overset{\frown}{AC} = 120^0 - 30^0 = 90^0$.

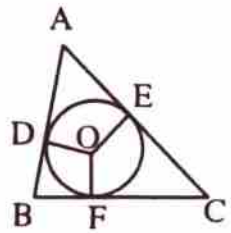


☞ ***Nhận xét***: Nhiều em học sinh khi thực hiện ví dụ trên chỉ xét một trong hai trường hợp, để tránh mắc phải những thiết sót kiểu này cần học thuộc thật kỹ định nghĩa về góc ở tâm.

Ví dụ 5: *Cho* ΔABC *có* $\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \beta$. *Đường tròn* (O) *nội tiếp tam giác tiếp xúc với* AB, AC, BC *theo thứ tự ở* D, E, F.

a. *Tính số đo cung nhỏ và cung lớn* $\overset{\frown}{DE}$.

b. *Tính số đo cung nhỏ và cung lớn* $\overset{\frown}{EF}$.



✍ *Giải*

a. Xét tứ giác ADOE, ta có:

$\widehat{DOE} = 360^0 - \hat{A} - \hat{D} - \hat{E} = 360^0 - \alpha - 90^0 - 90^0 = 180^0 - \alpha$.

Vậy, ta được:

- Số đo (độ) của cung nhỏ $\overset{\frown}{DE}$ bằng $180^0 - \alpha$.
- Số đo (độ) của cung lớn $\overset{\frown}{DE}$ bằng $360^0 - (180^0 - \alpha) = 180^0 + \alpha$.

b. Trong ΔABC, ta có $\hat{C} = 180^0 - \hat{A} - \hat{B} = 180^0 - \alpha - \beta$.

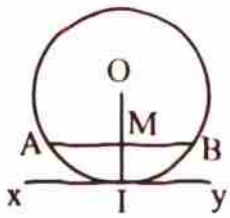
Xét tứ giác CEOF, ta có:

$\widehat{EOF} = 360^0 - \hat{C} - \hat{F} - \hat{E} = 360^0 - (180^0 - \alpha - \beta) - 90^0 - 90^0 = \alpha + \beta$.

Vậy, ta được:

- Số đo (độ) của cung nhỏ $\overset{\frown}{EF}$ bằng $\alpha + \beta$.
- Số đo (độ) của cung lớn $\overset{\frown}{EF}$ bằng $360^0 - (\alpha + \beta)$.

Ví dụ 6: *Chứng minh rằng nếu một tiếp tuyến song song với một dây thì tiếp điểm chia đôi cung căng dây.*



✍ *Giải*

Gọi I là tiếp điểm, nối OI cắt AB tại M, ta có:

OI ⊥ xy (tính chất của tiếp tuyến)

Mặt khác: AB // xy ⇒ OI ⊥ AB

⇒ IA = IB, tính chất đường kính vuông góc với một dây.

☞ ***Nhận xét***: Ví dụ trên là một trường hợp đặc biệt của định lý hai cung chắn giữa hai dây song song.

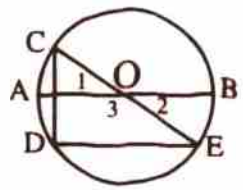
Ví dụ 7: *Cho đường tròn* (O) *đường kính* AB *và một cung* AC *có số đo nhỏ hơn* 90^0. *Vẽ dây* CD *vuông góc với* AB *và dây* DE *song song với* AB. *Chứng minh rằng*:

a. $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BE}$. b. *Ba điểm* C, O, E *thẳng hàng.*

✍ *Giải*

a. Ta có AB vuông góc với CD nên:

$AC = AD \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$. (1)



Ta có AB song song với DE nên:

$AD = BE \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BE}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BE}$.

b. Ta có: $\hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180^0$ (hai góc kề bù), $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (vì $AC = BE < 180^0$)

$\Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_3 = 180^0 \Rightarrow$ C, O, E thẳng hàng.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho đường tròn (O, R), dây $AB = R\sqrt{2}$. Tính số đo hai cung $\overset{\frown}{AB}$.

Bài 2: Cho ΔABC có $\hat{A} = 70^0$. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác tiếp xúc với AB, AC theo thứ tự ở D, E. Tính số đo cung nhỏ $\overset{\frown}{DE}$.

Bài 3: Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai tia tiếp tuyến AM và AN, chúng tạo với nhau một góc α.

a. Tính số đo (độ) của cung lớn $\overset{\frown}{MN}$.

b. Từ một điểm I trên cung nhỏ $\overset{\frown}{MN}$, vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt AM và AN lần lượt tại B và C. Tia OB và OC cắt đường tròn lần lượt tại D và E. Chứng minh rằng số đo của cung nhỏ $\overset{\frown}{DE}$ có giá trị không đổi khi điểm I chạy trên cung nhỏ $\overset{\frown}{MN}$.

Bài 4: Cho đường tròn (O) và dây AB. Lấy hai điểm M và N nằm trên cung nhỏ AB chia cung này thành ba cung bằng nhau $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{NB}$. Các bán kính OM và ON cắt AB tại C và D. Chứng minh rằng AC = BD và AC > CD.

ABC

Bài 5: Cho đường tròn (O, R) và một dây AB sao cho số đo của cung lớn AB gấp đôi cung nhỏ AB. Tính diện tích ΔAOB.

Bài 6: Cho hai đường tròn đồng tâm (O, R) và $\left(O;\ \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$. Tiếp tuyến của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại A và B. Tính số đo của hai cung $\overset{\frown}{AB}$.

Bài 7: Cho C là một điểm nằm trên cung AB của đường tròn (O). Điểm C chia cung AB thành hai cung AC và CB. Chứng minh rằng sđ $\overset{\frown}{AB}$ = sđ $\overset{\frown}{AC}$ + sđ $\overset{\frown}{BC}$.

Bài 8: Cho ΔABC. Gọi O là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C.

a. Tính số đo các góc ở tâm tạo bởi hai trong ba bán kính OA, OB, OC.

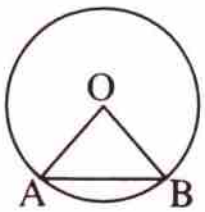
b. Tính số đo các cung tạo bởi hai trong ba điểm A, B, C.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. Xét ΔOAB, ta có:

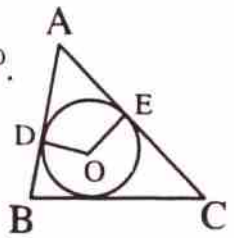
$OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 = AB^2 \Leftrightarrow$ ΔOAB vuông cân tại O

$\Rightarrow \overset{\frown}{AOB} = 90^0$.



Từ đó, ta được:

- Số đo (độ) của cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ bằng 90^0.
- Số đo (độ) của cung lớn $\overset{\frown}{AB}$ bằng $360^0 - 90^0 = 270^0$.



Bài 2. Xét tứ giác ADOE, ta có:

$\overset{\frown}{DOE} = 360^0 - \hat{A} - \hat{D} - \hat{E}$

$= 360^0 - 70^0 - 90^0 - 90^0 = 110^0$.

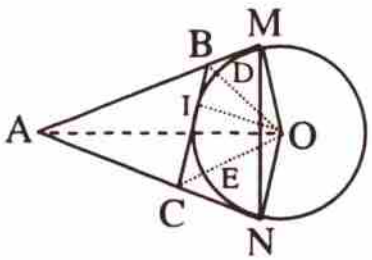
Vậy, số đo (độ) của cung nhỏ $\overset{\frown}{DE}$ bằng 110^0.

Bài 3.

a. Xét tứ giác AMON, ta có:

$\overset{\frown}{MON} = 360^0 - \hat{A} - \hat{M} - \hat{N}$

$= 360^0 - \alpha - 90^0 - 90^0 = 180^0 - \alpha$.



Khi đó, số đo (độ) của cung lớn $\overset{\frown}{MN}$ bằng: $360^0 - (180^0 - \alpha) = 180^0 + \alpha$.

b. Nhận xét rằng:

- BM và BI là hai tiếp tuyến nên $\overset{\frown}{BOM} = \overset{\frown}{BOI} \Rightarrow \overset{\frown}{BOI} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{MOI}$.
- CN và CI là hai tiếp tuyến nên $\overset{\frown}{CON} = \overset{\frown}{COI} \Rightarrow \overset{\frown}{COI} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{NOI}$.

Khi đó: $D\hat{O}E = \overset{\frown}{BOI} + \overset{\frown}{COI} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{MOI} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{NOI} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{MOI} + \overset{\frown}{NOI})$

$= \frac{1}{2}\overset{\frown}{MON} = \frac{1}{2}(180^0 - \alpha) = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$ có giá trị không đổi.

$\Leftrightarrow$ số đo của cung nhỏ $\overset{\frown}{DE}$ có giá trị không đổi.

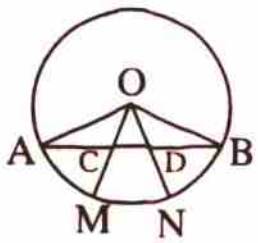
Bài 4.

a. Xét hai tam giác ΔOAC và ΔOBD, ta có: $\overset{\frown}{AOC} = \overset{\frown}{AOD}$, vì $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{NB}$

OA = OB, bán kính đường tròn

$\overset{\frown}{OAC} = \overset{\frown}{OBD}$, vì ΔOAB cân tại O

Do đó: ΔOAC = ΔOBD ⇒ AC = BD, đpcm.



b. Trong ΔOAD có OC là tia phân giác, do đó:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{OA}{OD} > \frac{OA}{ON} = 1 \Rightarrow AC > CD, \text{ đpcm.}$$

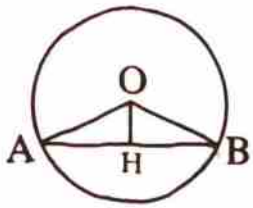
Bài 5. Với giả thiết "*Số đo của cung lớn AB gấp đôi cung nhỏ AB*", suy ra:

$\overset{\frown}{AOB} = 120^0$.

Hạ OH vuông góc với AB.

Xét ΔOAH vuông tại H, ta có:

$$\overset{\frown}{AOH} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AOB} = 60^0 \Rightarrow \overset{\frown}{OAH} = 90^0 - 60^0 = 30^0$$



Khi đó: $OH = \frac{1}{2}OA = \frac{R}{2}$

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Leftrightarrow AH = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Xét ΔOAB, ta có:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OH.AB = \frac{1}{2}OH.2AH = OH.AH = \frac{R}{2}.\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

Bài 6. Nhận xét rằng, trong ΔOAB cân tại O có:

$$OA = OB = R \text{ và đường cao } OH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow$ ΔOAB đều $\Rightarrow \overset{\frown}{AOB} = 60^0$.

Khi đó:

- Số đo cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ bằng 60^0.
- Số đo cung lớn $\overset{\frown}{AB}$ bằng $360^0 - 60^0 = 300^0$.

Bài 8. *Học sinh tự vẽ hình.*

a. Ta có: $\overset{\frown}{AOB} = 180^0 - (\overset{\frown}{OAB} + \overset{\frown}{OBA}) = 180^0 - (30^0 + 30^0) = 120^0$.

$\overset{\frown}{AOC} = \overset{\frown}{BOC} = 120^0$.

b. Ta có:

$sđAB_{nhỏ} = 120^0$; $sđAB_{lớn} = 240^0$.

$sđAC_{nhỏ} = 120^0$; $sđAC_{lớn} = 240^0$.

$sđBC_{nhỏ} = 120^0$; $sđBC_{lớn} = 240^0$.

CHỦ ĐỀ 2

LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Đối với hai cung nhỏ trong một đường tròn:

1. Hai cung bằng nhau khi và chỉ khi chúng căng hai dây bằng nhau.
2. Cung lớn hơn khi và chỉ khi nó căng dây lớn hơn.

Trong đường tròn (O), ta có minh hoạ:

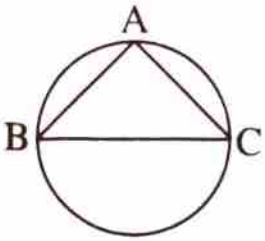
$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AOB} = \overset{\frown}{COD}$.

$\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow AB > CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AOB} > \overset{\frown}{COD}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Cho* ΔABC *vuông cân tại* A *và nội tiếp trong đường tròn* (O). *Chứng tỏ rằng:*

a. $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$. b. $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{BC}$.



✍ *Giải*

Xét ΔABC vuông cân tại A, ta có ngay:

AB = AC (hai cạnh bên của tam giác cân) $\Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$.

AB < BC (cạnh góc vuông nhỏ hơn cạnh huyền) $\Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{BC}$.

☞ *Chú ý*:

1. Giữa đường kính với dây và cung căng dây có sự liên hệ như " *Đường kính vuông góc với dây thì :*
   - *Đường kính đi qua trung điểm của dây*
   - *Đường kính đi qua điểm chính giữa của cung*"
2. Hai cung chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.

Ví dụ 2: (Bài 10/tr 71 – Sgk):

a. *Vẽ đường tròn tâm* O, *bán kính* R = 2cm. *Nêu cách vẽ cung* AB *có số đo bằng* 60^0. *Hỏi dây* AB *dài bao nhiêu xentimét*?

b. *Làm thế nào để chia được đường tròn thành sáu cung bằng nhau như trên hình sgk.*

✍ *Giải*

a. Cách vẽ:

- Lấy điểm A tuỳ ý trên đường tròn.
- Vẽ đường tròn tâm A, bán kính OA = 2cm.
- Đường tròn (A) cắt (O) tại B.
- Cung AB = 60^0 cần dựng và AB = 2cm.

Chứng minh:

Đường tròn tâm A, bán kính OA = 2cm cắt (O) tại B $\Rightarrow$ OA = AB.

Ngoài ra ta có OA = OB

Vậy, ΔOAB đều $\Rightarrow A\hat{O}B = 60^0 \Rightarrow$ cung AB = 60^0.

b. Để chia hình tròn (O ; R) thành 6 cung bằng nhau. Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Từ điểm A bất kì trên đường tròn (O ; R), vẽ đường tròn (A ; R) cắt (O) tại B.

Bước 2: Từ điểm B vừa vẽ, vẽ đường tròn (B ; R) cắt (O) tại C.

Bước 3: Từ điểm C vừa vẽ, vẽ đường tròn (C ; R) cắt (O) tại D.

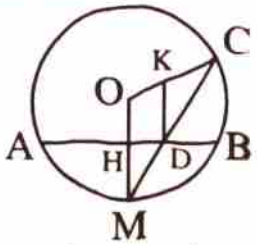
Bước 4: Từ điểm D vừa vẽ, vẽ đường tròn (D ; R) cắt (O) tại E.

Bước 5: Từ điểm E vừa vẽ, vẽ đường tròn (E ; R) cắt (O) tại F.

Vậy, các điểm A, B, C, D, E chia đường tròn (O) thành 6 cung bằng nhau.

Ví dụ 3: *Cho đường tròn* (O), *dây* AB. *Gọi* M *là điểm chính giữa của cung* AB. *Vẽ dây MC cắt dây* AB *tại* D. *Vẽ đường vuông góc với* AB *tại* D, *cắt* OC *ở* K. *Chứng minh rằng* ΔKCD *là tam giác cân.*

Giải



Vì M là điểm chính giữa của cung AB nên:

$OM \perp AB \Rightarrow OM // KD$

$\Rightarrow \overset{\frown}{KDC} = \overset{\frown}{OMC} = \overset{\frown}{OCM} \Leftrightarrow \Delta KCD$ là tam giác cân.

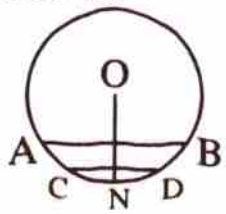
☛ ***Nhận xét***: Như vậy, ví dụ trên đã minh hoạ cho chúng ta thấy việc sử dụng tính chất đường kính vuông góc với một dây để giải toán. Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng tính chất " *Hai cung chắn giữa hai dây song song*".

Ví dụ 4: (Bài 13/tr 72 – Sgk): *Chứng minh rằng hai cung chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.*

Giải

Xét hai dây song song AB và CD, kẻ đường kính MN ⊥ AB, khi đó vì :

$AB // CD \Rightarrow MN \perp CD$.



Do tính đối xứng trục: $\overset{\frown}{NA} = \overset{\frown}{NB}$ và $\overset{\frown}{NC} = \overset{\frown}{ND}$

Suy ra: $\overset{\frown}{NA} - \overset{\frown}{NC} = \overset{\frown}{NB} - \overset{\frown}{ND} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

☛ ***Nhận xét***: Mở rộng, chúng ta có thêm tính chất:

" *Tiếp tuyến song song với một dây thì tiếp điểm chia đôi cung căng dây*".

Tức là, theo hình vẽ ta có:

$xy // AB \Rightarrow AM = BM \Leftrightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}$.

Ví dụ 5: *Cho* ΔABC *có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn* (O). *Đường cao* AH *của tam giác cắt đường tròn ở D. Vẽ đường kính* AOE.

a. *Chứng minh rằng* BEDC *là hình thang cân.*

b. *Gọi* M *là điểm chính giữa của cung* DE, OM *cắt* BC *tại* I. *Chứng minh rằng I là trung điểm của* BC.

c. *Tính bán kính đường tròn biết* BC = 24cm, IM = 8cm.

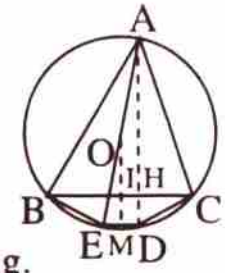
Giải

a. Ta có: AD ⊥ BC – theo giả thiết

AD ⊥ DE – vì AE là đường kính.

⇒ BC // DE ⇒ $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CD}$ – hai cung chắn giữa hai dây song song.

⇒ BE = CD – liên hệ giữa cung và dây.



Mặt khác ta có:

$\overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{ED} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{ED} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CE} \Rightarrow$ BD = CE.

Vậy, BEDC là hình thang cân.

b. Ta có : $\overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{EM} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DM} \Rightarrow \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{MC}$

⇒ IB = IC – đường kính đi qua điểm chính giữa của cung.

c. Ta có : BI = IC ⇒ OI ⊥ BC (đường kính đi qua trung điểm dây).

Đặt OC = OM = R, xét ΔOIC vuông:

$OC^2 = OI^2 + IC^2 \Leftrightarrow R^2 = (R - 8)^2 + 12^2$

$\Leftrightarrow R^2 = R^2 - 16R + 64 + 144 \Rightarrow 16R = 208 \Rightarrow R = 13$cm.

Nhận xét:

1. Hình thang có hai cạnh bên bằng nhau chưa đủ là hình thang cân. Do đó không thể chứng minh BDEC là hình thang cân bằng cách chứng minh BD = CE để suy ra BD = CE.
2. Câu c) là một bài toán thực tế: "*Biết độ dài dây BC và khoảng cách IM từ trung điểm dây đến điểm chính giữa cung bị trương, ta tìm được bán kính của đường tròn*".

Ví dụ 6: (Bài 11/tr 72 – Sgk): *Cho hai đường tròn bằng nhau* (O) *và* (O') *cắt nhau tại hai điểm* A *và* B. *Kẻ các đường kính* AOC, AO'D. *Gọi* E *là giao điểm thứ hai của* AC *với đường tròn* (O').

a. *So sánh các cung nhỏ* $\overset{\frown}{BC}$ *và* $\overset{\frown}{BD}$.

b. *Chứng minh rằng* B *là điểm chính giữa của cung* EBD (*tức là điểm* B *chia cung* EBD *thành hai cung bằng nhau*: BE = BD).

Giải

a. Tứ giác AOBO' là hình thoi do AO = OB = O'A = O'B

Do đó: $\widehat{AOB} = \widehat{AO'B}$. Suy ra, $\widehat{BOC} = \widehat{BO'D} \Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{BC}$ = sđ$\overset{\frown}{BD}$.

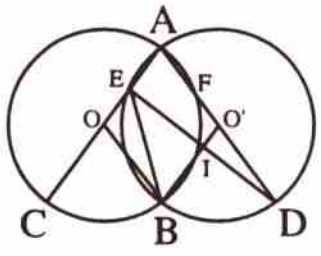
Do (O) và (O') là các đường tròn bằng nhau và sđBC = sđBD nên $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$.

b. Gọi I là giao điểm của O'B và DE.

Lại có, OA // O'B

Theo định lý Talét, ta có: $\frac{DI}{DE} = \frac{DO'}{DA} = \frac{1}{2}$

Suy ra, I là trung điểm của DE.



Mặt khác, ΔEAD vuông tại E (vì EO' = O'A = O'D)

$\Rightarrow DE \perp AO \Rightarrow DE \perp BO'$ (vì AO // BO').

Xét ΔBED có

BI vừa là đường cao vừa là trung tuyến $\Rightarrow \Delta BED$ là tam giác cân đỉnh B.

Do đó: BD = BE $\Rightarrow$ cung BD = BE hay B là điểm chính giữa cung EBD.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Tứ giác ABCD có $\hat{B} = \hat{D} = 90^0$. Biết AB < AD, chứng minh rằng BC > CD.

Bài 2. Hai đường tròn (O) và (O') cùng bán kính cắt nhau tại M và N.

a. Chứng minh rằng hai cung nhỏ $\overset{\frown}{MN}$ của hai đường tròn bằng nhau.

b. Vẽ các đường kính MOA và MO'B. Chứng minh rằng $\overset{\frown}{NA} = \overset{\frown}{NB}$.

c. Vẽ đường kính NOC. Tia BM cắt đường tròn (O) tại D. Chứng minh rằng các cung nhỏ $\overset{\frown}{MN}$, $\overset{\frown}{AC}$ và $\overset{\frown}{CD}$ bằng nhau.

Bài 3. Cho ΔABC. Trên tia đối của tại AB lấy một điểm D sao cho AD = AC. Vẽ đường tròn tâm O ngoại tiếp ΔDBC. Từ O lần lượt hạ các đường vuông góc OH, OK với BC và BD ($H \in BC$, $K \in BD$).

a. Chứng minh rằng OH > OK.

b. So sánh hai cung nhỏ BD và BC.

Bài 4. Trên dây cung AB của đường tròn (O) lấy hai điểm C và D sao cho AC = CD = DB. Các bán kính qua C và qua D cắt cung nhỏ AB lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BF} < \overset{\frown}{EF}$.

Bài 5. (Bài 14/tr 72 – Sgk):

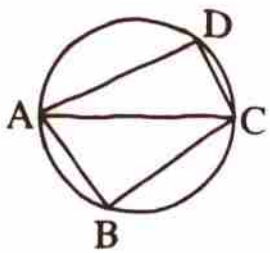
a. Chứng minh rằng đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy. Mệnh đề đảo có đúng không? Hãy nêu thêm điều kiện để mệnh đề đảo đúng.

b. Chứng minh rằng đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. Với giả thiết $\hat{B} = \hat{D} = 90^0$, suy ra:

ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AC.



Ta có: $AB < AD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{AD} \Leftrightarrow -\overset{\frown}{AB} > -\overset{\frown}{AD}$

$\Leftrightarrow 180^0 - \overset{\frown}{AB} > 180^0 - \overset{\frown}{AD} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AD}$

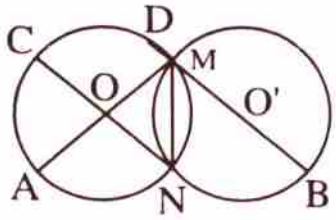
$\Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} > \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow BC > CD$, đpcm.

Bài 2.

a. Vì MN là dây cung chung của hai đường tròn bằng nhau nên hai cung nhỏ $\overset{\frown}{MN}$ của hai đường tròn bằng nhau.

b. Ta có: $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$, vì hai đường tròn bằng nhau

$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{AM} - \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{MB} - \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{NB}$, đpcm.



c. Tứ giác ACMN là hình bình hành vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, nên:

$CM // AN \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{MN}$. (1)

Mặt khác, ta có:

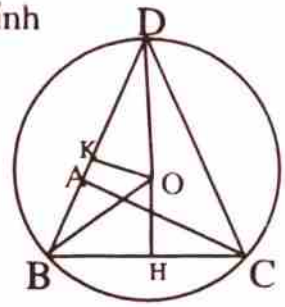
A, N, B thẳng hàng và AN = BN

$\Rightarrow$ ON là đường trung bình của $\Delta ABD \Rightarrow CN // DM \Rightarrow \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{CD}$. (2)

Từ (1) và (2), ta được $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD}$, đpcm.

Bài 3.

a. Xét ΔOBD và ΔOBC cân tại đỉnh O có các đường cao kẻ từ đỉnh theo thứ tự là OK và OH nên chúng đồng thời là các trung tuyến.



Do đó: $KD = \frac{1}{2}BD$; $HC = \frac{1}{2}BC$.

Mặt khác, trong ΔDBC có: BD = BA + AD = BA + AC > BC.

Suy ra KD > HC.

Xét ΔOKD và ΔOHC vuông, ta có:

$$OK = \sqrt{OD^2 - KD^2} = \sqrt{OC^2 - KD^2} < \sqrt{OC^2 - HC^2} = OH.$$

Vậy, ta luôn có OK < OH.

b. Ta có: BD > BC $\Rightarrow$ cungBD > BC.

Bài 4. *(Học sinh tự vẽ hình) Hướng dẫn*:

a. Ta đi chứng minh $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BF}$.

Nhận xét rằng: $\Delta AOC = \Delta BOD$ (c.g.c) $\Rightarrow \overset{\frown}{AOE} = \overset{\frown}{BOF} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BF}$.

b. Ta đi chứng minh $\overset{\frown}{AE} < \overset{\frown}{EF}$.

Cách 1: Chứng minh rằng $\overset{\frown}{AOE} < \overset{\frown}{EOF}$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng.

Bài 5.

a. Giả sử đường kính CD của đường tròn (O) có C là điểm chính giữa của cung AB.

Nghĩa là, ta có: AC = CB. Suy ra, $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

Gọi I là giao điểm của CD và AB, ta có:

OI vừa là tia phân giác vừa là trung tuyến của ΔOAB.

Vậy, I là trung điểm của AB.

Mệnh đề đảo không đúng, ta cần bổ sung thêm: "Đường kính đi qua trung điểm một dây không đi qua tâm của đường tròn thì nó vuông góc với dây đó".

b. Đường kính CD đi qua C là điểm chính giữa cung AB nên: AC = CB.

Suy ra: $\overset{\frown}{AOC} = \overset{\frown}{COB} \Rightarrow$ OC là tia phân giác của góc $\overset{\frown}{AOB}$.

Vì ΔOAB cân tại O nên đường phân giác đồng thời là đường cao.

Vậy, ta có $OC \perp AB \Leftrightarrow CD \perp AB$.

CHỦ ĐỀ 3

GÓC NỘI TIẾP

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa: Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên một đường tròn và hai cạnh của nó cắt đường tròn.

Trong hình minh hoạ bên, ta thấy: $\widehat{ABC}$ là góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AbC}$ (viết tắt là $\overset{\frown}{AC}$ và được hiểu là cung $\overset{\frown}{AC}$ không chứa điểm B).

$\widehat{BCA}$ là góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{BA}$.

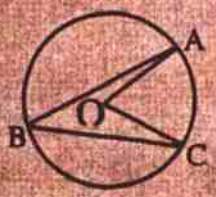
$\widehat{CAB}$ là góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{CB}$.

2. GÓC NỘI TIẾP VÀ CUNG BỊ CHẮN

Định lí: Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

Ta có minh hoạ:

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC} = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AOC}.$$

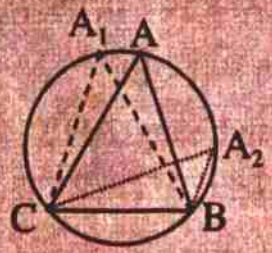


3. CÁC HỆ QUẢ

Hệ quả 1: Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc hai cung bằng nhau của một đường tròn thì bằng nhau.

Ta có minh hoạ với các điểm A, A_1, A_2 ở cùng một phía đối với BC:

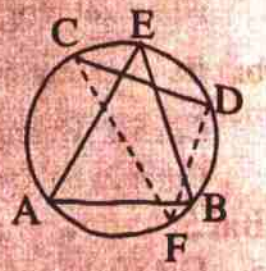
$$\widehat{BAC} = \widehat{BA_1C} = \widehat{BA_2C} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BC}$$



$$\widehat{AEB} = \widehat{CFD}$$

$$\Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

$$\Leftrightarrow AB = CD.$$

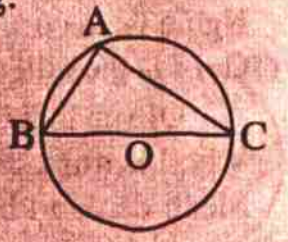


Hệ quả 2: Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

Ta có minh hoạ:

$$\widehat{BAC} = 90^0$$

$$\Leftrightarrow BC \text{ là đường kính } (O \in BC).$$



Hệ quả 3: Trong một đường tròn, mọi góc nội tiếp không quá 90^0 có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

Ta có minh hoạ:

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AOC}.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG

Ví dụ 1: (Bài 17/tr 75 – Sgk): *Muốn xác định tâm của một đường tròn mà chỉ dùng êke thì phải làm như thế nào?*

✍ *Giải*

Để xác định tâm của một đường tròn mà chỉ dùng êke, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Kẻ đường thẳng cắt đường tròn tại A và B.

Bước 2. Qua B, dùng êke kẻ đường thẳng vuông góc với AB tại B và cắt đường tròn tại C.

Bước 3. Nối C với A.

Bước 4. Qua A, dùng êke kẻ đường thẳng vuông góc với AB tại A và cắt đường tròn tại D.

Bước 5. Nối B với D.

Giao điểm của AC và BD là tâm của đường tròn.

Ví dụ 2: *Dựng một tam giác vuông, biết cạnh huyền dài* 4cm *và một cạnh góc vuông dài* 2,5cm.

✍ *Giải*

Giả sử dựng được ΔABC vuông có cạnh huyền BC = 4cm, cạnh góc vuông AB = 2,5cm.

Gọi O là trung điểm của BC. Ta có: OB = OC = OA = 2 (cm)

Vậy, ΔABC nội tiếp đường tròn đường kính BC có cạnh AB = 2,5cm.

Cách dựng: Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Dựng đường tròn bán kính r = 2cm.

Bước 2. Qua O kẻ đường thẳng d cắt đường tròn tại hai điểm B và C.

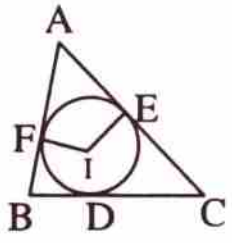
Bước 3. Dựng đường tròn tâm B, bán kính 2,5cm và cắt đường tròn (O) tại A_1 và A_2.

Vậy, ΔA_1BC và A_2BC thoả mãn đề bài.

☞ ***Chú ý***: Tại bước 3, ta cũng có thể dựng đường tròn tâm C, bán kính 2,5cm và cắt đường tròn (O) tại A_3 và A_4.

Ví dụ 3: *Cho* ΔABC. *Đường tròn* (I) nội *tiếp tam giác tiếp xúc với* BC, AC, BA *theo thứ tự ở* D, E, F. *Cho biết* $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$. *Tính số đo của góc* $\widehat{BAC}$.

✍ *Giải*



Ta có: $\widehat{EDF} = \frac{1}{2}\widehat{EIF}$, góc nội tiếp và góc ở tâm

$\Leftrightarrow \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{EIF} \Leftrightarrow \widehat{EIF} = 2\widehat{BAC}$.

Xét tứ giác AEIF, ta có:

$\widehat{AEI} = \widehat{AFI} = 90^0$, vì (I) tiếp xúc với AB, AC

$\widehat{BAC} + \widehat{AEI} + \widehat{EIF} + \widehat{AFI} = 360^0$

$\Leftrightarrow \widehat{BAC} + 90^0 + 2\widehat{BAC} + 90^0 = 360^0 \Leftrightarrow \widehat{BAC} = 60^0$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên chúng ta đã sử dụng các kết quả để giải nó, cụ thể:

- Mối liên hệ giữa góc nội tiếp với góc ở tâm.
- Tính chất của đường tròn nội tiếp tam giác.
- Tổng các góc trong một tứ giác.

Vấn đề 2: GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH

Ví dụ 1: (Bài 19/tr 75 – Sgk): *Cho đường tròn tâm* O, *đường kính* AB *và* S *là một điểm nằm bên ngoài đường tròn.* SA *và* SB *lần lượt cắt đường tròn tại* M, N. *Gọi* H *là giao điểm của* BM *và* AN. *Chứng minh rằng* SH *vuông góc với* AB.

✍ *Giải – Học sinh tự vẽ hình*

Ta có, AMB và ANB là các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên:

BMA = ANB = 90^0.

Do đó: BM ⊥ AS, AN ⊥ SB ⇒ H là trực tâm của ΔSAB.

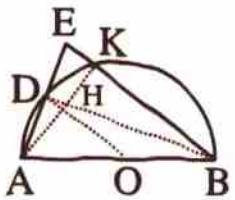
Vậy, ta được AH ⊥ AB.

Ví dụ 2: *Cho đường tròn* (O), *đường kính* AB, *điểm* D *thuộc đường tròn. Gọi* E *là điểm đối xứng với* A *qua* D. *Gọi* K *là giao điểm của* EB *với đường tròn* (O) *và* H *là giao điểm của* BD *với* AK.

a. ΔABE *là tam giác gì ?*

b. *Chứng minh rằng* EH *vuông góc với* AB.

c. *Chứng minh rằng* OD *vuông góc với* AK.



✍ *Giải*

a. Xét ΔABE, ta có:

$\widehat{ADB} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn ⇔ BD ⊥ AE (1)

tức là BD vừa là trung tuyến vừa là đường cao, do đó ΔABE cân tại B.

b. Ta có ngay: $\widehat{AKB} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn ⇔ AK ⊥ BE. (2)

Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm ΔABE, do đó EH ⊥ AB.

c. Nhận xét rằng OD là đường trung bình của ΔABE, do đó:

OD // BE ⇔ OD ⊥ AK, đpcm.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên chúng ta đã sử dụng các kết quả về số đo của góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.

Ví dụ 3: (Bài 22/tr 76 – Sgk): *Trên đường tròn* (O) *đường kính* AB, *lấy điểm* M (*Khác* A *và* B). *Vẽ tiếp tuyến của* (O) *tại* A. *Đường thẳng* BM *cắt tiếp tuyến đó tại* C. *Chứng minh rằng ta luôn có*: $MA^2 = MB.MC$

Giải – Học sinh tự vẽ hình

Ta có: CA ⊥ AB (tính chất của tiếp tuyến).

Suy ra ΔABC vuông tại A.

Mặt khác, $AMB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên AM là đường cao của ΔABC.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: $MA^2 = MB.MC$ – đpcm

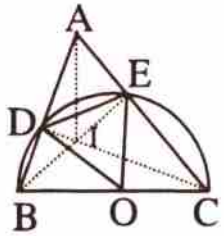
Ví dụ 4: *Cho* ΔABC *có ba góc nhọn. Đường tròn* (O) *có đường kính* BC *cắt* AB, AC *theo thứ tự ở* D, E. *Gọi* I *là giao điểm của* BE *và* CD.

a. *Chứng minh rằng* AI ⊥ BC.

b. *Chứng minh rằng* $\widehat{IAE} = \widehat{IDE}$.

c. *Cho* $\widehat{BAC} = 60^0$, *chứng minh* ΔDOE *là tam giác đều.*

Giải



a. Ta có: $\widehat{BDC} = \widehat{BEC}$ – vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

⇒ BE, CD là đường cao của ΔABC

⇒ I là trực tâm ΔABC ⇒ AI ⊥ BC.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$\widehat{IAE} = \widehat{CBE}$ – vì góc nhọn có cạnh tương tứng vuông góc

CB ⊥ IA, BE ⊥ AE.

$\widehat{IDE} = \widehat{CBE}$ – vì góc nội tiếp cùng chắn cung CE ⇒ $\widehat{IAE} = \widehat{IDE}$.

Cách 2: Ta có: $\widehat{ADI} = \widehat{AEI} = 90^0$ ⇒ D, E thuộc đường tròn có đường kính IA.

Khi đó, các góc $\widehat{IAE}$ và $\widehat{IDE}$ là góc nội tiếp chắn cung IE của đường tròn đó nên $\widehat{IAE} = \widehat{IDE}$.

c. Trong ΔACD vuông tại D có $\hat{A} = 60^0$, ta suy ra:

$\widehat{ACD} = 30^0 \Rightarrow \widehat{DOE} = 2\widehat{ACD} = 60^0$.

Khi đó, ΔDOE cân có $\widehat{DOE} = 60^0$ nên là tam giác đều.

Ví dụ 5: (Bài 26/tr 76 – Sgk): *Cho* AB, BC, CA *là ba dây của đường tròn* (O). *Từ điểm chính giữa* M *của cung* AB *vẽ dây* MN *song song với dây* BC. *Gọi giao điểm của* MN *và* AC *là* S. *Chứng minh rằng* SM = SC *và* SN = SA.

Giải – Học sinh tự vẽ hình

Nối AM và NC. Xét ΔAMS và ΔNCS, ta có:

$M\hat{A}S = C\hat{N}S$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MBC)

$A\hat{M}S = N\hat{C}S$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AN)

Lại có:

MB = MA (M là đỉnh chính giữa cung AB)

MB = NC (hai cung chắn giữa hai dây song song).

Suy ra cung AM = NC ⇒ MA = CN.

Vậy, ta có ΔAMS = ΔNCS (g.c.g) ⇒ SM = SC và SN = SA.

Ví dụ 6: *Cho hai đường tròn* (O) *và* (O') *bằng nhau, cắt nhau tại* A *và* B. *Qua* B *vẽ một cát tuyến cắt đường tròn* (O) *và* (O') *lần lượt tại* C *và* D.

a. *Chứng minh* AC = AD.

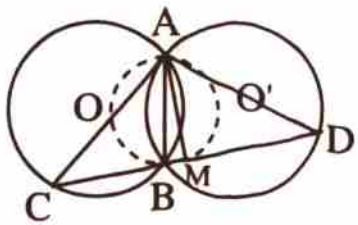
b. *Tìm quỹ tích trung điểm* M *của* CD *khi cát tuyến* CBD *quay quanh* B.

✍ *Giải*

a. Từ giả thiết " *hai đường tròn (O) và (O') bằng nhau* ", nên hai cung nhỏ AB của chúng bằng nhau, do đó:

$\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{ADB} \Leftrightarrow$ ΔACD cân tại A ⇔ AC = AD, đpcm.

b. Ta lần lượt thực hiện:



Phần thuận: Với M là trung điểm CD, suy ra:

AM ⊥ CD, vì ΔACD cân tại A

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{AMB} = 90^0 \Leftrightarrow$ M ∈ (AB).

Vậy, điểm M thuộc đường tròn đường kính AB.

Phần đảo: Lấy điểm M ∈ (AB) và giả sử đường thẳng BM cắt (O) và (O') theo thứ tự tại C và D, ta cần đi chứng minh M là trung điểm của CD.

Thật vậy, trong ΔACD cân tại A, ta có:

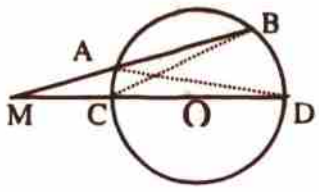
$\overset{\frown}{AMB} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

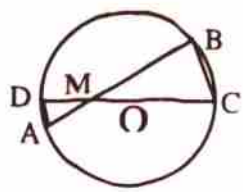
⇔ AM ⊥ CD ⇒ CM = DM, vì tam giác cân đường cao là trung tuyến.

Kết luận: Quĩ tích điểm M là đường tròn đường kính AB.

☞ ***Nhận xét***: Với các định lí về góc nội tiếp, góc ở tâm, khả năng chứng minh các góc bằng nhau và tính số đo của góc được tăng thêm nhiều.

Ví dụ 7: (Bài 23/tr 76 – Sgk): *Cho một đường tròn* (O) *và một điểm* M *cố định không nằm trên đường tròn. Qua* M *vẽ một cát tuyến cắt đường tròn ở* A *và* B. *Chứng minh rằng tích* MA.MB *không phụ thuộc vị trí của cát tuyến.*





✍ *Giải*

Nối MO cắt (O) ở C và D.

Ta có hai trường hợp:

Trường hợp 1: Hai tam giác ΔAMD và ΔCMB có:

$\widehat{M}$ chung

$\overset{\frown}{ADM} = \overset{\frown}{CBM}$ – góc nội tiếp cùng chắn một cung

$$\Rightarrow \Delta AMD \sim \Delta CMB \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Leftrightarrow MA.MB = MC.MD, \text{ không đổi}$$

Trường hợp 2: Hai tam giác ΔAMD và ΔCMB có:

$\widehat{AMD} = \widehat{BMC}$ – đối đỉnh

$\widehat{ADM} = \widehat{CBM}$ – góc nội tiếp cùng chắn một cung

$$\Rightarrow \Delta AMD \sim \Delta CMB \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Leftrightarrow MA.MB = MC.MD, \text{ không đổi}$$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho nửa đường tròn (O) có đường kính AB và C là một điểm bên ngoài đường tròn . Nối CA, CB gặp đường tròn theo thứ tự ở M, N. Gọi H là giao điểm của BM và AN.

a. Chứng minh rằng CH ⊥ AB.

b. Cho $\widehat{ACB} = 60^0$, chứng minh ΔOMN là tam giác đều.

Bài 2. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ đường thẳng qua A cắt (O) tại M và (O') tại N (A nằm giữa M và N). Hỏi MBN là tam giác gì? Tại sao?

Bài 3. Hai đường tròn (O, R) và (O', r) cắt nhau tại A và B. Từ A vẽ đường kính AOC và AO'D.

a. Chứng minh rằng ba điểm B, C, D thẳng hàng và AB vuông góc với CD.

b. Biết R ≥ r và CD = a, hãy tính BC và BD.

Bài 4. Cho ΔABC. Hai đường tròn đường kính AB và AC cắt nhau tại một điểm thứ hai là D.

a. Chứng minh rằng ba điểm B, D, C thẳng hàng.

b. Đường thẳng AC cắt đường tròn đường kính AB tại E, đường thẳng AB cắt đường tròn đường kính AC tại F. Chứng minh rằng ba đường thẳng AD, BE, CF cùng đi qua một điểm.

Bài 5. Cho đường tròn (O) và hai dây AB, CD bằng nhau cắt nhau tại M (điểm C nằm trên cung nhỏ AB, điểm B nằm trên cung nhỏ (CD).

a. Chứng minh AC = DB.

b. Chứng minh ΔMAC = ΔMDB.

c. Tứ giác ACBD là hình gì ? Chứng minh.

Bài 6. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Gọi O là điểm chính giữa của nửa đường tròn và M là một điểm bất kì của nửa đường tròn đó. Tia AM cắt đường tròn (O; OA) tại điểm thứ hai là N. Chứng minh rằng MN = MB.

Bài 7. Cho đường tròn (O) và hai dây MA, MB vuông góc với nhau. Gọi I và K lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ MA và MB. Gọi P là giao điểm của AK và BI.

a. Chứng minh rằng ba điểm A, O, B thẳng hàng.

b. Chứng minh rằng P là tâm đường tròn nội tiếp ΔMAB.

c. Giả sử MA = 12cm, MB = 16cm, tính bán kính của đường tròn nội tiếp ΔMAB.

Bài 8. Cho đường tròn tâm O đường kính AB và một điểm C chạy trên một nửa đường tròn. Vẽ một đường tròn (I) tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đường kính AB tại D, đường tròn này cắt CA và CB lần lượt tại các điểm thứ hai là M và N. Chứng minh rằng:

a. Ba điểm M, I, N thẳng hàng.

b. ID $\perp$ MN.

c. Đường thẳng CD đi qua một điểm cố định

d. Nêu cách dựng đường tròn (I) nói trên.

Bài 9. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH. Kẻ đường kính AE.

a. Tính $\overset{\frown}{ACE}$.

b. Chứng minh rằng $\overset{\frown}{BAH} = \overset{\frown}{OAC}$.

c. Gọi K là giao điểm của AH với đường tròn (O). Tứ giác BCEK là hình gì ?

Bài 10. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác góc A cắt đường tròn ở M.

a. Chứng minh rằng ΔBMC là tam giác cân.

b. Chứng minh rằng $\overset{\frown}{BMC} = \overset{\frown}{ABC} + \overset{\frown}{ACB}$.

c. Gọi D là giao điểm của AM và BC. Chứng minh rằng AB.AC = AD.AM.

Bài 11. Cho ΔABC đều nội tiếp đường tròn (O) và M là một điểm trên cung BC. Trên tia AM lấy điểm D sao cho MD = MB.

a. ΔMBD là tam giác gì ? So sánh hai tam giác ΔBDA và ΔBMC.

b. Chứng minh rằng MA = MB + MC.

Bài 12. Cho nửa đường tròn đường kính AB, K là điểm chính giữa của cung AB. Vẽ bán kính OC sao cho $\overset{\frown}{BOC} = 60^0$.

a. Gọi M là giao điểm của AC và OK. Chứng minh rằng MO = MC.

b. Cho AB = 2R, tính MC theo R.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1.

a. Xét ΔABC, ta có:

$\overset{\frown}{ANB} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Leftrightarrow$ AN $\perp$ BC (1)

$\overset{\frown}{AMB} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Leftrightarrow$ BM $\perp$ AC (2)

Từ (1), (2), suy ra:

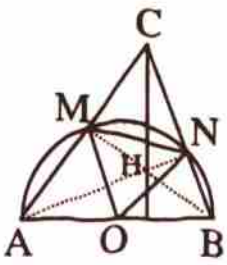
H là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow$ CH $\perp$ AB, đpcm.

b. Xét ΔBMC vuông tại M, ta có:

$\overset{\frown}{ACB} = 60^0 \Leftrightarrow \overset{\frown}{MBC} = 30^0 \Leftrightarrow$ sđ $\overset{\frown}{MN} = 60^0$.

Mặt khác, ta có:

$\overset{\frown}{MON}$ = sđ $\overset{\frown}{MN} = 60^0$.



Vậy, ΔOMN cân (vì OM = ON) và có một góc $\overset{\frown}{MON} = 60^0$ nên là tam giác đều.

Bài 2. Hai đường tròn (O) và (O') bằng nhau nên AOBO' là hình thoi.

Do đó: $\overset{\frown}{AOB} = \overset{\frown}{AO'B}$. Theo tính chất của góc nội tiếp, ta có:

$$NMB = AMB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AOB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AO'B} = ANB = MNB.$$

Vậy, ta được ΔBMN là tam giác cân tại B.

Bài 3.

a. Ta có nhận xét: $\widehat{ABC} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)

$\widehat{ABD} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O')

$\Rightarrow \widehat{CBD} = 180^0 \Leftrightarrow$ ba điểm B, C, D thẳng hàng

Ta cũng thấy ngay AB vuông góc với CD.

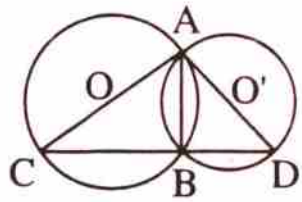
b. Đặt BC = x, khi đó BD = a − x.

- Trong ΔABC vuông tại B, ta có: $AB^2 = AC^2 - BC^2 = 4R^2 - x^2$. (1)
- Trong ΔABD vuông tại B, ta có: $AB^2 = AD^2 - BD^2 = 4r^2 - (a - x)^2$. (2)

Từ (1), (2), suy ra:

$$4R^2 - x^2 = 4r^2 - (a - x)^2 \Leftrightarrow 4R^2 - x^2 = 4r^2 - a^2 + 2ax - x^2$$

$$\Leftrightarrow 2ax = 4R^2 - 4r^2 + a^2 \Leftrightarrow x = \frac{4R^2 - 4r^2 + a^2}{2a}.$$



Vậy, ta được:

$$BC = \frac{4R^2 - 4r^2 + a^2}{2a},\ BD = a - \frac{4R^2 - 4r^2 + a^2}{2a} = \frac{a^2 - 4R^2 + 4r^2}{2a}.$$

Bài 4.

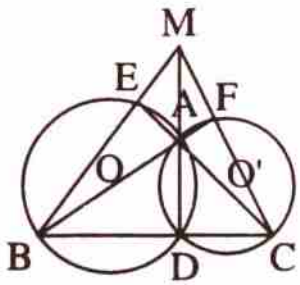
a. Ta có nhận xét:

$\widehat{ADB} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)

$\widehat{ADC} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O')

$\Rightarrow \widehat{BDC} = 180^0 \Leftrightarrow$ ba điểm B, C, D thẳng hàng

Ta cũng thấy ngay AD ⊥ BC.



b. Giả sử BE cắt CF tại M.

Xét ΔMBC, ta có:

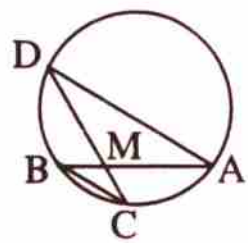
$\widehat{BEC} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Leftrightarrow$ CE ⊥ BM (1)

$\widehat{BFC} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Leftrightarrow$ BF ⊥ CM (2)

từ (1), (2) suy ra: A là trực tâm $\Delta MBC \Rightarrow$ MA ⊥ BC, đpcm.

Vậy, ba đường thẳng AD, BE, CF cùng đi qua điểm M.

Bài 5.



a. Từ giả thiết: $AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

Khi đó: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} \Leftrightarrow AC = BD$, đpcm.

b. Xét hai tam giác ΔMAC và ΔMDB, ta có:

$\widehat{MAC} = \widehat{MDB}$, góc nội tiếp cùng chắn cung BC

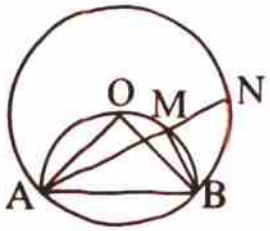
AC = BD, theo kết quả câu a)

$\widehat{MCA} = \widehat{MBD} = \widehat{MDB}$, góc nội tiếp cùng chắn cung AD

do đó $\Delta MAC = \Delta MDB$ (g.c.g).

c. Ta có: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} \Leftrightarrow$ AD // BC. Vậy, tứ giác ACBD là hình thang cân.

Bài 6. Từ giả thiết, ta có ngay: $\overset{\frown}{AOB} = 90^0$ và $\overset{\frown}{AMB} = 90^0$ vì chúng đều là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB.

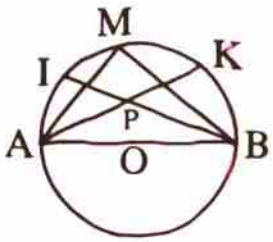


Mặt khác, ta cũng có: OA = OB ⇒ B ∈ (O, OA)

Do đó: $\overset{\frown}{ANB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AOB} = 45^0$.

Khi đó, ΔBMN vuông tại M có $\overset{\frown}{MNB} = 45^0$ nên nó là tam giác vuông cân, suy ra MN = MB, đpcm.

Bài 7.



a. Từ giả thiết: $\overset{\frown}{AMB} = 90^0 \Leftrightarrow$ AB là đường kính

⇒ ba điểm A, O, B thẳng hàng.

b. Xét ΔMAB, ta có:

- Vì I là điểm chính giữa cung nhỏ MA nên:

$\overset{\frown}{AI} = \overset{\frown}{MI} \Leftrightarrow \overset{\frown}{ABI} = \overset{\frown}{MBI} \Leftrightarrow$ BI là phân giác góc $A\hat{B}M$

- Vì K là điểm chính giữa cung nhỏ MB nên:

$\overset{\frown}{BK} = \overset{\frown}{MK} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BAK} = \overset{\frown}{MAK} \Leftrightarrow$ AK là phân giác góc $\overset{\frown}{MAB}$

Từ đó, suy ra P là tâm đường tròn nội tiếp ΔMAB (vì nó là giao điểm của hai đường phân giác).

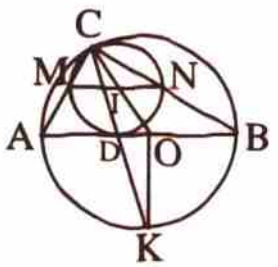
c. Gọi r, p theo thứ tự là bán kính đường tròn nội tiếp và nửa chu vi của ΔMAB, ta có:

$$S_{\Delta MAB} = p.r \Leftrightarrow \frac{1}{2}MA.MB = \frac{1}{2}(MA + MB + AB)r$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{MA.MB}{MA + MB + AB} = \frac{MA.MB}{MA + MB + \sqrt{MA^2 + MB^2}} = 4cm.$$

Vậy, bán kính của đường tròn nội tiếp ΔMAB bằng 4cm.

Bài 8.



a. Ta có: $\overset{\frown}{ACB} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)

⇒ $\overset{\frown}{MCN} = 90^0 \Leftrightarrow$ MN là đường kính (I).

Vậy, ba điểm M, I, N thẳng hàng.

b. Từ giả thiết:

- Vì (I) tiếp xúc với AB tại D nên ID ⊥ AB. (1)
- Vì (I) tiếp xúc với (O) tại C nên C, I, O thẳng hàng.

Ta có: $\overset{\frown}{INC} = \overset{\frown}{ICN}$, vì ΔICN cân tại I; $\overset{\frown}{OBC} = \overset{\frown}{OCB}$, vì ΔOBC cân tại O

Suy ra: $\overset{\frown}{INC} = \overset{\frown}{OBC} \Leftrightarrow$ MN // AB. (2)

Từ (1), (2) suy ra ID ⊥ MN, đpcm.

c. Gọi K là giao điểm của CD với (O), ta có:

ID ⊥ MN $\Leftrightarrow \overset{\frown}{MD} = \overset{\frown}{ND} \Leftrightarrow \overset{\frown}{MCD} = \overset{\frown}{NCD} \Leftrightarrow \overset{\frown}{ACK} = \overset{\frown}{BCK}$

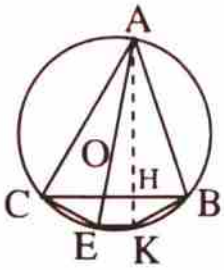
$\Leftrightarrow \overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{BK} \Leftrightarrow$ K là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{AB}$,

Do đó K cố định. Vậy, CD luôn đi qua điểm cố định K.

d. Để dựng đường tròn (I), ta thực hiện:

- Dựng OK vuông góc với AB, với K thuộc nửa đường tròn không chứa điểm C.

- Nối CK cắt AB tại D.
- Dựng đường thẳng qua D vuông góc với AB cắt CO tại I.
- Dựng đường tròn (I, ID) – đây chính là đường tròn cần dựng.



Bài 9.

a. Ta có ngay: $\widehat{ACE} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.

b. Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{AEC}$, góc nội tiếp cùng chắn cung AC

$\Leftrightarrow \widehat{BAH} = \widehat{OAC}$, cùng phụ với hai góc bằng nhau ở trên.

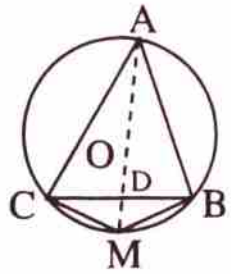
c. Ta có: $\widehat{AKE} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Leftrightarrow EK \perp AK \Leftrightarrow EK // BC$, vì cùng vuông góc với AH (1)

$\Rightarrow \widehat{BK} = \widehat{CE} \Leftrightarrow BK = CE.$ (2)

Từ (1) và (2), ta kết luận BCEK là hình thang cân.

Bài 10.



a. Từ giả thiết " *AM là tia phân giác góc Â*, ta suy ra:

$\widehat{BAM} = \widehat{CAM} \Leftrightarrow \widehat{BM} = \widehat{CM} \Leftrightarrow BM = CM$

$\Leftrightarrow \Delta MBC$ cân tại M.

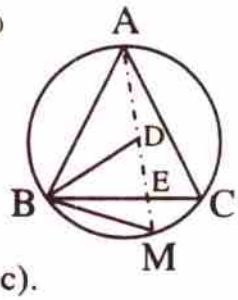
b. Ta có: $\widehat{BMC} = \widehat{BMA} + \widehat{CMA} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC}$, đpcm.

c. Xét hai tam giác ΔAMB và ΔACD, ta có:

$\widehat{BMA} = \widehat{ACD}$ và $\widehat{MAB} = \widehat{CAD} \Rightarrow \Delta AMB \backsim \Delta ACD$

$\Leftrightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AB}{AD} \Leftrightarrow AB.AC = AD.AM$, đpcm.

Bài 11.



a. Xét ΔMBD, ta có: MB = MD, giả thiết $\widehat{BMD} = \widehat{BMA} = \widehat{BCA} = 60^0$

Do đó, ΔMBD là tam giác đều.

Xét hai tam giác ΔBDA và ΔBMC, ta có:

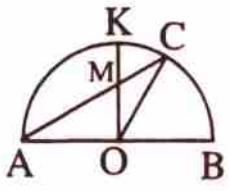
BD = BM, vì ΔMBD là tam giác đều

$\widehat{ABD} = \widehat{CBM}$, vì tổng của chúng với $\widehat{CBD}$ bằng 60^0

AB = CB, vì ΔABC là tam giác đều do đó ΔBDA = ΔBMC (c.g.c).

b. Ta có ngay: MA = MD + DA = MB + MC, đpcm.

Bài 12.



a. Vì ΔOAC cân tại O (OA = OC) nên:

$\widehat{OCA} = \widehat{OAC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}.60^0 = 30^0.$ (1)

Mặt khác, ta lại có: $\widehat{COM} = \widehat{BOK} - \widehat{BOC} = 90^0 - 60^0 = 30^0.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: ΔMOC cân tại M $\Leftrightarrow$ MO = MC, đpcm.

b. Xét ΔOAM vuông tại O, ta có: $MO = OA.\tan\hat{A} = R.\tan 30^0 = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$.

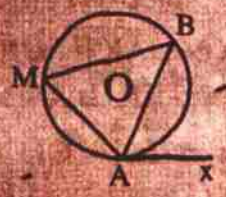
Vậy, ta được $MC = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$.

CHỦ ĐỀ 4

GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định lí: Trong một đường tròn, số đo của góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây cung đi qua tiếp điểm bằng nửa số đo của cung bị chắn.



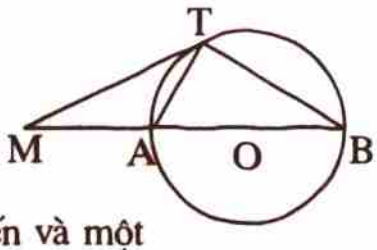
Ta có minh hoạ: $\widehat{BAx} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$.

☛ ***Nhận xét***: Như vậy, góc nội tiếp và góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây cùng chắn một cung thì bằng nhau, cụ thể: $\widehat{BAx} = \widehat{AMB}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH

Ví dụ 1: (Bài 34/tr 80 – Sgk): *Từ điểm* M *bên ngoài đường tròn* (O) *ta kẻ một tiếp tuyến* MT *và một cát tuyến* MAB *của đường tròn đó. Chứng minh rằng* $MT^2 = MA.MB$.



✍ *Giải*

Hai tam giác ΔMAT và ΔMTB có:

$\widehat{M}$ chung

$\widehat{ATM} = \widehat{MBT}$ – vì góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây và góc nội tiếp cùng chắn một cung

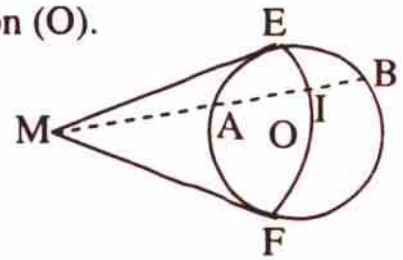
$\Rightarrow \Delta MAT \sim \Delta MTB \Rightarrow \frac{MT}{MB} = \frac{MA}{MT} \Leftrightarrow MT^2 = MA.MB.$

☛ ***Nhận xét***: Ví dụ tiếp theo sẽ sử dụng sử dụng kết quả MA.MB không đổi để giải bài toán quĩ tích.

Ví dụ 2: *Cho đường tròn* (O) *và một điểm* M *ở bên ngoài đường tròn. Tia* Mx *quay quanh* M *cắt đường tròn tại* A *và* B. *Gọi* I *là một điểm thuộc tia* Mx *sao cho* $MI^2 = MA.MB$. *Tìm quỹ tích của điểm* I.

✍ *Giải*

Phần thuận: Kẻ hai tiếp tuyến ME, MF tới đường tròn (O).



Ta có:

$ME^2 = MF^2 = MA.MB = MI^2$

$\Leftrightarrow ME = MF = MI$

$\Leftrightarrow$ I thuộc đường tròn (M, ME).

Hạn chế quĩ tích: Vì A chỉ chạy trên cung $\overset{\frown}{EF}$ của đường tròn (O) nên I chỉ chạy trên cung $\overset{\frown}{EF}$ của đường tròn (M, ME) nằm trong đường tròn (O).

Phần đảo: Lấy điểm I $\in$ $\overset{\frown}{EF}$ của đường tròn (M, ME) nằm trong đường tròn (O). Nối MI cắt đường tròn (O) tại A và B, ta cần chứng minh $MA.MB = MI^2$.

Thật vậy: $MI^2 = ME^2 = MA.MB$, đpcm.

Kết luận: Vậy, quỹ tích của điểm I thuộc cung $\overset{\frown}{EF}$ của đường tròn (M, ME) nằm trong đường tròn (O).

Ví dụ 3: (Bài 33/tr 80 – Sgk): *Cho* A, B, C là *ba điểm trên một đường tròn.* At *là tiếp tuyến của đường tròn tại* A. *Đường thẳng song song với* At *cắt* AB *tại* M *và cắt* AC *tại* N. *Chứng minh* AB.AM = AC.AN.

✍ *Giải – Học sinh tự vẽ hình*

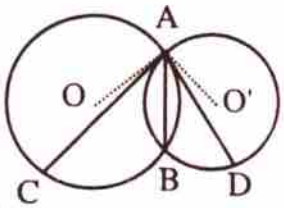
Ta có: $\widehat{CAt} = \widehat{ABC} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AC}$; $\widehat{CAt} = \widehat{ANM}$ (do MN // At)

Suy ra: $\widehat{ABC} = \widehat{AMN}$

Xét ΔABC và ΔAMN có: $\widehat{BAC}$ chung; $\widehat{ABC} = \widehat{AMN}$

Suy ra: $\Delta ABC \backsim \Delta ANM \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM} \Rightarrow AB.AM = AC.AN$ – đpcm.

Ví dụ 4: (Bài 29/tr 79 – Sgk): *Cho hai đường tròn* (O) *và* (O') *cắt nhau tại* A *và* B. *Từ* A *ta vẽ hai tiếp tuyến với hai đường tròn. Hai tiếp tuyến này gặp đường tròn* (O) *ở* C *và đường tròn* (O') *ở* D. *Chứng minh rằng* $\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{ABD}$.



✍ *Giải*

Xét hai tam giác ΔABC và ΔDBA có:

$\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{DAB}$ – vì góc nội tiếp và góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây cùng chắn một cung

$\overset{\frown}{BAC} = \overset{\frown}{BDA}$ – vì góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây và góc nội tiếp cùng chắn một cung

$\Rightarrow \overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{ABD}$, đpcm.

☞ ***Nhận xét***: Nếu khai thác thêm sự bằng nhau của hai cặp góc để dẫn tới hai tam giác đồng dạng chúng ta sẽ nhận được kết quả khác, ví dụ:

a. $AB^2 = BC.BD$.

b. $\frac{AC}{AD} = \sqrt{\frac{BC}{BD}}$.

Thật vậy, ta được $\Delta ABC \sim \Delta DBA$ suy ra: $\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BA} = \frac{AC}{DA}$.

Từ đó:

a. Với: $\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BA} \Leftrightarrow AB^2 = BC.BD$, đpcm.

b. Với: $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DA} \& \frac{BC}{BA} = \frac{AC}{DA} \Rightarrow \frac{AC}{AD}.\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{BD}.\frac{BC}{AB}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{AC}{AD}\right)^2 = \frac{BC}{BD} \Leftrightarrow \frac{AC}{AD} = \sqrt{\frac{BC}{BD}}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 5: (Bài 27/tr 79 – Sgk): Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Lấy điểm P khác A và B trên đường tròn. Gọi T là giao điểm của AP với tiếp tuyến tại B của đường tròn. Chứng minh rằng: $\widehat{APO} = \widehat{PBT}$.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Ta có: $\widehat{PBT} = \frac{1}{2}$ sđPB. (1)

$\widehat{PAB} = \frac{1}{2}$ sđPB. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{PBT} = \widehat{PAB}$. (3)

Xét ΔOAP cân tại O, ta có $\widehat{APO} = \widehat{PAB}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\widehat{APO} = \widehat{PBT}$ – đpcm.

Vấn đề 2: GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG

Ví dụ 1: (Bài 11/tr 72 – Sgk): *Cho đường tròn* (O ; R) *và dây cung* BC = R. *Hai tiếp tuyến của đường tròn* (O) *tại* B *và* C *cắt nhau ở* A. *Tính số đo các góc* $\widehat{ABC}$, $\widehat{BAC}$.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Ta có: BC = OB = OC = R. Suy ra, ΔOBC đều và $\widehat{BOC} = 60^0$.

Vậy, ta được: sđ$\widehat{BC} = \widehat{BOC} = 60^0$; $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}$ sđ$\widehat{BC} = 30^0$;

$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \text{ sđ} \widehat{BC} = 30^0; \widehat{BAC} = 180^0 - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 120^0.$$

Ví dụ 2: *Cho đường tròn* (O) *đường kính* AB. *Một tiếp tuyến của đường tròn tại* D *cắt đường thẳng* AB *tại* T *(điểm* B *nằm giữa* O *và* T). *Tính* $\widehat{BTP} + 2\widehat{TPB}$.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Ta có: $\widehat{TPB} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{PB} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{POB} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{POT} \Rightarrow 2\widehat{TPB} = \widehat{POT}$.

Do PT là tiếp tuyến với (O) tại P nên: OP ⊥ PT

Lại có, ΔOPT vuông tại P.

Do đó: $90^0 = \widehat{POT} + \widehat{BTP} = 2\widehat{TPB} + \widehat{BTP}$ – đpcm.

Ví dụ 3: *Cho nửa đường tròn* (O) *đường kính* AB. *Trên tia đối của tia* AB *lấy một điểm* M. *Vẽ tiếp tuyến* MC *với nửa đường tròn. Gọi* H *là hình chiếu của* C *trên* AB.

a. *Chứng minh rằng tia* CA *là tia phân giác của góc* $\widehat{MCH}$.

b. *Giả sử* MA = a, MC = 2a, *tính* AB *và* CH.

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng: $\widehat{ACB} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn ⇔ AC ⊥ BC

Suy ra: $\widehat{ACH} = \widehat{ABC}$, góc có cạnh tương ứng vuông góc.

Mặt khác, ta lại có:

$\widehat{ABC} = \widehat{ACM}$ vì góc nội tiếp và góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây cùng chắn một cung.

Từ đó: $\widehat{ACH} = \widehat{ACM}$ ⇔ CA là tia phân giác của góc $\widehat{MCH}$.

b. Ta có: $MC^2 = MA.MB \Leftrightarrow MB = \frac{MC^2}{MA} = 4a$,

AB = MB – MA = 4a – a = 3a.

Xét ΔOCM, ta có: OC ⊥ MC

Suy ra: $S_{\Delta OCM} = \frac{1}{2}OC.MC = \frac{1}{2}CH.OM \Leftrightarrow CH = \frac{OC.MC}{OM} = \frac{\frac{AB}{2}.MC}{MA + \frac{AB}{2}} = 1{,}2a.$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn (O) ta vẽ tiếp tuyến MT và cát tuyến MAB. Vẽ đường tròn (O') ngoại tiếp ΔMAT. Từ M vẽ tiếp tuyến xy của đường tròn (O'). Chứng minh rằng:

a. $MT^2 = MA.MB$. b. BT // xy.

Bài 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Trên đường thẳng AB lấy một điểm M (điểm M không thuộc đoạn thẳng AB). Vẽ tiếp tuyến MT của đường tròn (O) và cát tuyến MCD của đường tròn (O'). Chứng minh rằng $MT^2 = MC.MD$.

Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ dây BC của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tron (O'). Vẽ dây BD của đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O). Chứng minh rằng:

a. $AB^2 = AC.AD$.

b. $\frac{BC}{BD} = \sqrt{\frac{AC}{AD}}$.

Bài 4. Cho ΔABC ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F là các tiếp điểm của đường tròn trên các cạnh AB, BC, CA. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường tròn (O) với các tia OA, OB, OC. Chứng minh rằng các điểm M, N, P lần lượt là tâm của đường tròn nội tiếp các tam giác ΔADF, ΔBDE và ΔCEF.

Bài 5. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đường tròn (O') tại D. Vẽ đường tròn (I) qua ba điểm A, C, D, cắt đường thẳng AB tại điểm thứ hai là E. Chứng minh rằng:

a. $\overset{\frown}{CAD} + \overset{\frown}{CBD} = 180^0$.

b. Tứ giác BCED là hình bình hành.

Bài 6. Cho nửa đường tròn (O) đường kính BC. Điểm A thuộc cung nửa đường tròn (AB < AC). Tiếp tuyến tại A cắt đường thẳng BC ở I. Kẻ AH ⊥ BC. Chứng minh rằng:

a. AB là tia phân giác của góc $\widehat{IAH}$.

b. $IA^2 = IB.IC$.

Bài 7. Cho nửa đường tròn (O) đường kính BC. Điểm A thuộc cung nửa đường tròn (AB < AC). Gọi E là điểm đối xứng với B qua A.

a. ΔBCE là tam giác gì ?

b. Gọi D là giao điểm của CE với nửa đường tròn. Kẻ tiếp tuyến Bx với nửa đường tròn (Bx và A cùng phía đối với BC). Chứng minh rằng BA là tia phân giác của góc $\widehat{DBx}$.

c. CA cắt BD, Bx theo thứ tự ở I, K. Tứ giác BKEI là hình gì ?

Bài 8. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B, Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O') cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai P. Tia PB cắt đường tròn (O') tại Q. Chứng minh đường thẳng AQ song song với tiếp tuyến tại P của đường tròn (O).

Bài 9. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm I có đường kính BH, nó cắt AB ở M. Vẽ đường tròn tâm K có đường kính CH, nó cắt AC ở N.

a. Tứ giác AMHN là hình gì ?

b. Chứng minh rằng MN là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).

c. Vẽ tiếp tuyến Ax của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng Ax song song với MN.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

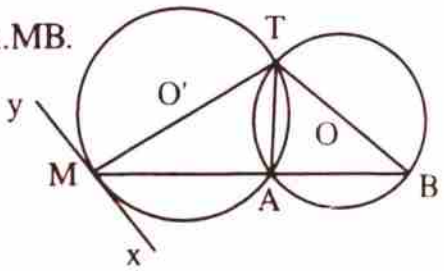
Bài 1.

a. Hai tam giác ΔMAT và ΔMTB có:

$\hat{M}$ chung

$\widehat{ATM} = \widehat{MBT}$ – vì góc nội tiếp và góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây cùng chắn một cung

$\Rightarrow \Delta MAT \sim \Delta MTB \Rightarrow \dfrac{MT}{MB} = \dfrac{MA}{MT} \Leftrightarrow MT^2 = MA.MB.$

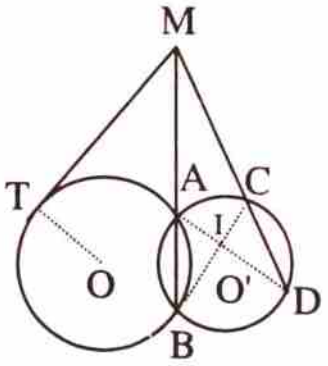


b. Ta có ngay:

$\widehat{AMx} = \widehat{ATM}$ – vì góc nội tiếp và góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây cùng chắn một cung

$\Rightarrow \widehat{AMx} = \widehat{MBT} \Leftrightarrow$ xy // BT, vì có hai góc so le trong bằng nhau.

Bài 2. Ta lần lượt xét:



- Xét hai tam giác ΔAMD và ΔCMB, ta có:

  $\hat{M}$ chung

  $\widehat{ADM} = \widehat{CBM}$ – góc nội tiếp cùng chắn một cung

  suy ra: ΔAMD ~ ΔCMB

  $\Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MB} \Leftrightarrow MA.MB = MC.MD.$ (1)

- Xét hai tam giác ΔMAT và ΔMTB, ta có:

  $\hat{M}$ chung

  $\widehat{ATM} = \widehat{MBT}$ – vì góc nội tiếp và góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây cùng chắn một cung

  Suy ra: $\Delta MAT \sim \Delta MTB \Rightarrow \dfrac{MT}{MB} = \dfrac{MA}{MT} \Leftrightarrow MT^2 = MA.MB.$ (2)

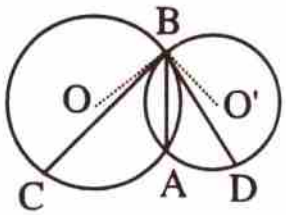
  Từ (1) và (2), suy ra: $MT^2 = MC.MD$, đpcm.

Bài 3. Xét hai tam giác ΔABC và ΔADB có:

$\widehat{ACB} = \widehat{ABD}$ – vì góc nội tiếp và góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây cùng chắn một cung

$\widehat{ABC} = \widehat{ADB}$ – vì góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây và góc nội tiếp cùng chắn một cung

suy ra: $\Delta ABC \sim \Delta ADB \Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DB} = \dfrac{AC}{AB}.$



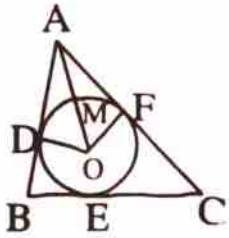
Từ đó:

a. Với: $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = AC.AD$, đpcm.

b. Với: $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{BD}$ & $\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{BD} \Rightarrow \frac{AB}{AD}.\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{BD}.\frac{BC}{BD}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{BC}{BD}\right)^2=\frac{AC}{AD} \Leftrightarrow \frac{BC}{BD}=\sqrt{\frac{AC}{AD}}$, đpcm.

Bài 4.



- Chứng minh M là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ΔADF, tức là cần chứng minh M là giao điểm của hai tia phân giác của ΔADF.

Trước tiên, vì AD, AF là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên:

AM là tia phân giác của góc $\widehat{DAF}$.

$\widehat{FM} = \widehat{DM}$

$\Leftrightarrow \widehat{MDF} = \widehat{MFD} = \widehat{MDA}$ vì góc nội tiếp và góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây cùng chắn một cung

$\Leftrightarrow$ DM là tia phân giác của góc $\widehat{ADF}$.

Vậy, M là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ΔADF

- Chứng minh tương tự cho các điểm N và P.

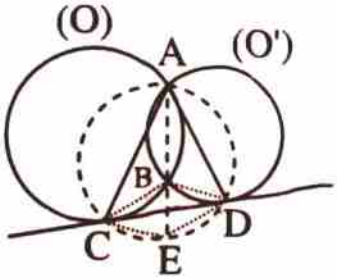
Bài 5.

a. Sử dụng tính chất góc nội tiếp và góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây cùng chắn một cung, ta có: $\widehat{CAB}=\widehat{BCD}$ và $\widehat{DAB}=\widehat{BDC}$.

Trong ΔBCD, ta có:

$180^0 = \widehat{BCD} + \widehat{BDC} + \widehat{CBD} = \widehat{CAB} + \widehat{DAB} + \widehat{CBD}$

$= \widehat{CAD} + \widehat{CBD}$, đpcm.



b. Trong đường tròn (ACD), ta có:

$\widehat{EDC} = \widehat{CAB} = \widehat{BCD} \Rightarrow$ BC // DE.

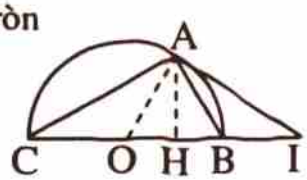
$\widehat{ECD} = \widehat{DAB} = \widehat{BDC} \Rightarrow$ BD // CE.

Vậy, tứ giác BCED là hình bình hành.

Bài 6.

a. Nhận xét rằng: $\widehat{BAC}=90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Leftrightarrow$ AC ⊥ AB



suy ra:

$\widehat{ACH} = \widehat{BAH}$, góc có cạnh tương ứng vuông góc.

Mặt khác, ta lại có:

$\widehat{ACH} = \widehat{BAI}$ vì góc nội tiếp và góc tạo bởi một tia tiếp tuyến và một dây cùng chắn một cung.

Từ đó: $\widehat{BAH} = \widehat{BAI} \Leftrightarrow$ AB là tia phân giác của góc $\widehat{IAH}$.

b. *Học sinh tự làm.*

Bài 7.

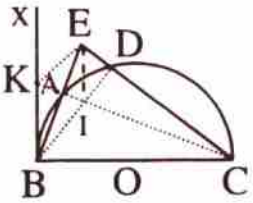
a. Xét ΔBCE, ta có: $\widehat{BAC} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Leftrightarrow CA \perp BE$ (1)

tức là CA vừa là trung tuyến vừa là đường cao, do đó ΔBCE cân tại C.

b. Ta có nhận xét: $\widehat{KBA} = \widehat{BCA} = \widehat{ECA} = \widehat{DCA} = \widehat{DBA}$

$\Leftrightarrow$ BA là tia phân giác của góc $\widehat{DBx}$, đpcm.



c. Trong ΔBKI, có BA vừa là phân giác vừa là đường cao nên:

ΔBKI cân tại B $\Rightarrow$ KA = IA và BK = BI.

Xét tứ giác BKEI, ta có nhận xét:

Hai đường chéo KI và BE cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Hai cạnh liên tiếp BK và BI bằng nhau.

Vậy, tứ giác BKEI là hình thoi.

Bài 8. *Bạn đọc tự vẽ hình.*

Xét đường tròn (O), ta có:

$\widehat{PAB} = \frac{1}{2}$ sđ $\widehat{PB}$ (góc nội tiếp chắn cung PB)

$PBy = \frac{1}{2}$ sđ $\widehat{PB}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến Py và dây cung PB)

Suy ra $\widehat{PBy} = \widehat{PAB}$. (1)

Xét đường tròn (O'), ta có:

$\widehat{AQB} = \frac{1}{2}$ sđ $\widehat{AmB}$ (góc nội tiếp chắn cung AmB)

$\widehat{PAB} = \frac{1}{2}$ sđ $\widehat{AmB}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến AP và dây cung AB)

Suy ra $\widehat{AQB} = \widehat{PAB}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{AQB} = \widehat{PBy}$. (3)

Đẳng thức (3) chứng tỏ rằng AQ // xy (hai góc so le trong bằng nhau)

Bài 9. *Hướng dẫn:*

a. Tứ giác AMHN là hình chữ nhật vì nó có ba góc vuông.

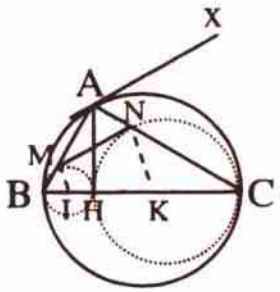
b. Ta đi chứng minh MN $\perp$ MI và MN $\perp$ NK.

Thật vậy:

$\widehat{NMI} = \widehat{NMH} + \widehat{IMH} = \widehat{AHM} + \widehat{IHM}$

$= \widehat{AHI} = 90^0$

$\Leftrightarrow$ MN $\perp$ MI



chứng minh tương tự cho MN $\perp$ NK

c. Ta có:

$\widehat{xAC} = \widehat{ABC} = \widehat{MBH} = \widehat{NMH} = \widehat{MNA} \Leftrightarrow$ Ax // MN.

CHỦ ĐỀ 5

GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

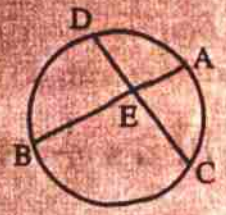
1. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN

Định lí 1: Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn có số đo bằng nửa tổng của số đo hai cung bị chắn giữa hai cạnh của góc và các tia đối của hai cạnh ấy.

Ta có minh hoạ:

$$\widehat{AEC} = \widehat{BED} = \frac{\text{sd}\,\widehat{AC} + \text{sd}\,\widehat{BD}}{2}.$$

$$\widehat{AED} = \widehat{BEC} = \frac{\text{sd}\,\widehat{AD} + \text{sd}\,\widehat{BC}}{2}.$$

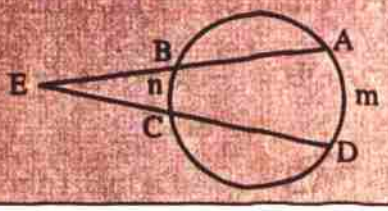


2. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

Định lí 2: Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn có số đo bằng nửa hiệu của số đo hai cung bị chắn giữa hai cạnh của góc.

Ta có minh hoạ:

$$\widehat{AED} = \frac{\text{sd}\,\widehat{AmD} - \text{sd}\,\widehat{BnC}}{2}.$$



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: (Bài 36/tr 82 – Sgk): *Một đường tròn* (O) *và hai dây* AB, AC. *Gọi* M, N *lần lượt là điểm chính giữa của các cung* AB *và* AC. *Đường thẳng* MN *cắt dây* AB *tại* E *và cắt dây* AC *tại* H. *Chứng minh* ΔAEH *là tam giác cân.*

Giải – Bạn đọc tự vẽ hình

Ta có:

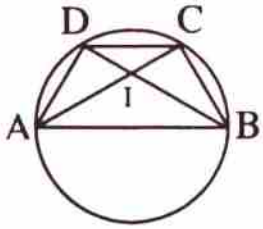
$$\widehat{AEH} = \frac{1}{2}[\text{sd}\,\widehat{AN} + \text{sd}\,\widehat{BM}] = \frac{1}{2}[\text{sd}\,\widehat{CN} + \text{sd}\,\widehat{AM}\,AM] = \widehat{AHE}.$$

Vậy, ta được ΔAEH cân tại A.

Ví dụ 2: *Cho hình thang* ABCD *có* AB // CD *và* AD = DC = CB *nội tiếp trong đường tròn đường kính* AB. *Tính số đo của góc* $\widehat{AIB}$ *với* I *là giao điểm của* AC *và* BD.

✍ *Giải*

Từ giải thiết, ta nhận được:



$$\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = 180^0$$

$$\text{sđ}\overset{\frown}{AD} = \text{sđ}\overset{\frown}{DC} = \text{sđ}\overset{\frown}{CB} = \frac{1}{3}\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = 60^0$$

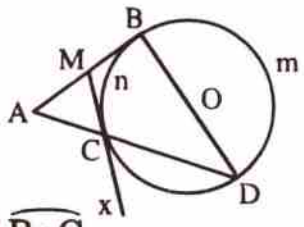
Số đo của góc $\widehat{AIB}$ được cho bởi:

$$\widehat{AIB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\overset{\frown}{DC}) = \frac{1}{2}(180^0 + 60^0) = 120^0.$$

☞ ***Nhận xét***: Cách làm trong lời giải của ví dụ trên được hiểu là "*Để chứng minh một tam giác là tam giác đều ta đi chứng minh nó là tam giác cân và có một góc bằng 60⁰*".

Ví dụ 3: (Bài 40/tr 83 – Sgk):*Từ một điểm* M *ở bên ngoài đường tròn* (O) *kẻ hai tiếp tuyến* MB, MC. *Vẽ đường kính* BOD. *Hai đường thẳng* CD *và* MB *cắt nhau tại* A. *Chứng minh rằng* M *là trung điểm của* AB.

✍ *Giải*



Ta có:

MB = MC – vì tính chất của hai tiếp tuyến. (1)

Vì $\widehat{BAD}$ là góc ở đỉnh bên ngoài đường tròn nên:

$$\widehat{BAD} = \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{BmD} - \text{sđ}\overset{\frown}{BnC}}{2} \overset{\text{BOD là đường kính}}{=} \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{BnD} - \text{sđ}\overset{\frown}{BnC}}{2}.$$

$$= \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{CD}}{2} \overset{\text{góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung}}{=} \widehat{xCD} \overset{\text{góc đối đỉnh}}{=} \widehat{ACM}.$$

Vậy ΔMAC cân tại M, suy ra MA = MC. (2)

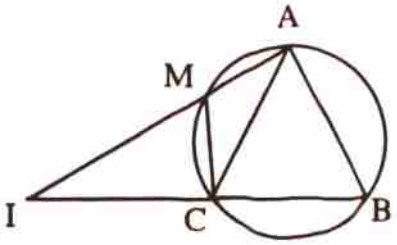
Từ (1) và (2) suy ra MA = MB, tức M là trung điểm của AB.

☞ ***Nhận xét***: Trong ví dụ trên, ta phải chứng minh MA = MB nhưng MB = MC (tính chất của hai tiếp tuyến) nên ta cần chứng minh MA = MC, tức là ta phải chứng minh ΔMAC cân.

Khi tính số đo của góc A ta đã thay thế cung $\overset{\frown}{BmD}$ bởi cung $\overset{\frown}{BnD}$ có cùng số đo. Nói chung khi phải tính tổng (hay hiệu) số đo của hai cung nào đó, ta thường dùng phương pháp thay thế một cung bởi một cung khác bằng nó để được hai cung liền nhau (nếu tính tổng) hoặc hai cung có một phần chung (nếu tính hiệu).

Ví dụ 4: (Bài 37/tr 82 – Sgk): *Cho đường tròn* (O) *và hai dây cung bằng nhau* AB, AC. *Trên cung nhỏ* AC *lấy điểm* M. *Gọi* I *là giao điểm của* AM *và* BC. *Chứng minh rằng* $\widehat{AIC} = \widehat{ACM}$.

✍ *Giải*



Ta có ngay:

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$, vì AB = AC

$\widehat{AIC} = \widehat{AIB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{MC})$,

góc có đỉnh bên ngoài đường tròn

$= \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AC} - \text{sđ}\overset{\frown}{MC}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}$ (1)

$\widehat{ACM} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}$, góc nội tiếp (2)

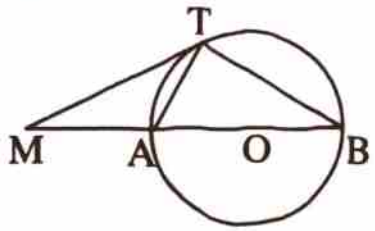
Từ (1) và (2) suy ra:

$\widehat{AIC} = \widehat{ACM}$, đpcm.

☛ ***Nhận xét***: Ta có hai trường hợp đặc biệt của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn, cụ thể:

Trường hợp 1: Với MT là tiếp tuyến và AB là đường kính.

Khi đó:

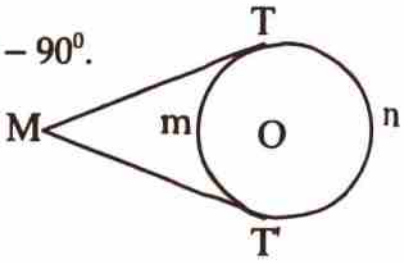


$\widehat{TMB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{TB} - \text{sđ}\overset{\frown}{TA})$

$= \frac{1}{2}[(180^0 - \text{sđ}\overset{\frown}{TA}) - \text{sđ}\overset{\frown}{TA}]$

$= 90^0 - \text{sđ}\overset{\frown}{TA}$

$= \frac{1}{2}[\text{sđ}\overset{\frown}{TB} - (180^0 - \text{sđ}\overset{\frown}{TB})] = \text{sđ}\overset{\frown}{TB} - 90^0.$



Trường hợp 2: Với MT, MT' là hai tiếp tuyến.

$\widehat{TMT'} = 180^0 - \text{sđ}\overset{\frown}{TmT'}$

$= \text{sđ}\overset{\frown}{TnT'} - 180^0.$

Ví dụ 5: (Bài 37/tr 82 – Sgk): *Trên một đường tròn, lấy liên tiếp ba cung* AC, CD, DB *sao cho* $\text{sđ}\overset{\frown}{AC} = \text{sđ}\overset{\frown}{CD} = \text{sđ}\overset{\frown}{DB} = 60^0$. *Hai đường thẳng* AC *và* BD *cắt nhau tại* E. *Hai tiếp tuyến của đường tròn tại* B *và* C *cắt nhau tại* T. *Chứng minh rằng*:

a. $\widehat{AEB} = BTC$. b. CD *là tia phân giác của* BCT.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

a. Ta có:

$\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = 360^0 - (\text{sđ}\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\overset{\frown}{CD} + \text{sđ}\overset{\frown}{DB}) = 180^0;$

$\widehat{AEB} = \frac{1}{2}[\text{sđ}\overset{\frown}{AB} - \text{sđ}\overset{\frown}{CD}] = \frac{1}{2}[180^0 - 60^0] = 60^0;$

$$\widehat{BTC} = \frac{1}{2}[\text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\overset{\frown}{AC} - (\text{sđ}\overset{\frown}{CD} + \text{sđ}\overset{\frown}{DB})]$$

$$= \frac{1}{2}[180^0 + 60^0 - (60^0 + 60^0)] = 60^0.$$

Vậy, ta được $\widehat{AEB} = \widehat{BTC}$.

b. Ta có:

$$\widehat{BCD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{DB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CD} = \widehat{DCT}.$$

Vậy, ta được CD là tia phân giác của góc BCT.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho AB và CD là hai đường kính vuông góc của đường tròn (O). Trên cung nhỏ BD lấy một điểm M. Tiếp tuyến tại M cắt tia AB ở E, đoạn thẳng CM cắt AB ở S. Chứng minh ES = EM.

Bài 2. Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn (O) ta vẽ tiếp tuyến MT và cát tuyến MAB đi qua tâm (A nằm giữa M và B). Giả sử số đo của cung nhỏ AT bằng 60^0. Tính số đo của góc $\widehat{TMB}$.

Bài 3. Qua điểm A nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai cát tuyến ABC và AMN sao cho hai đường thẳng BN và CM cắt nhau tại một điểm S nằm bên trong đường tròn. Chứng minh $\widehat{A} - \widehat{BSM} = 2\widehat{CMN}$.

Bài 4. Cho đường tròn (O) và một dây AB. Vẽ đường kính CD vuông góc với AB (D thuộc cung nhỏ AB). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm N. Các đường thẳng CN và DN lần lượt cắt đường thẳng AB tại E và F. Tiếp tuyến của đường tròn tại N cắt đường thẳng AB tại I. Chứng minh rằng:

a. Các tam giác ΔINE và ΔINF là tam giác cân.

b. $IN = \frac{1}{2}(AE + AF)$.

Bài 5. Cho đường tròn (O, R) và hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Trên tia AB lấy điểm M sao cho $AM = R\sqrt{2}$. Vẽ dây CN đi qua M. Từ N vẽ tiếp tuyến xy với đường tròn. Chứng minh rằng:

a. xy // AC.

b. Ta CN là tia phân giác của góc $\widehat{BCD}$.

Bài 6. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) ta vẽ tiếp tuyến AB và cát tuyến ACD. Vẽ dây BM vuông góc với tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$, dây này cắt CD tại E. Chứng minh rằng:

a. BM là tia phân giác của góc $\widehat{CBD}$.

b. $MD^2 = ME \cdot MB$

Bài 7. Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác của hai góc $\hat{B}$ và $\hat{C}$ cắt nhau ở E và cắt đường tròn ở F và D. Chứng minh rằng tứ giác EDAF là một hình thoi.

Bài 8. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn. P, Q, R theo thứ tự là các điểm chính giữa của các cung bị chắn BC, CA, AB bởi các góc A, B, C.

a. Chứng minh AP ⊥ QR.

b. AP cắt CR tại I. Chứng minh ΔCPI là tam giác cân.

Bài 9. Cho ΔABC nhọn và AB < AC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ AB, BC, CA. Tiếp tuyến tại A của đường tròn cắt các đường thẳng BC và DF lần lượt tại M và N. Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng BC với đường thẳng DF và AE.

a. Chứng minh rằng AE ⊥ DF.

b. Chứng minh rằng MA = MQ, MN = MP

Bài 10. Cho đường tròn (O) đường kính AB, cung CD = 80^0 nằm cùng phía đối với AB (D thuộc cung BC). Gọi E là giao điểm của AC và BD, F là giao điểm của AD và BC. Tính $\widehat{AEB}$, $\widehat{AFB}$.

Bài 11. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm M thuộc tia đối của tia BC. Gọi I là giao điểm của MA với đường tròn. Chứng minh rằng:

a. $\widehat{AMC} = \widehat{ACI}$.

b. $AI.AM = AC^2$.

Bài 12. Cho đường tròn (O), đường kính AB vuông góc với dây CD. Qua điểm M thuộc cung AD, kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt CD ở I. Gọi E là giao điểm của BM và CD.

a. Chứng minh rằng IM = IE.

b. Gọi F là giao điểm của AM và CD. Chứng minh rằng $\widehat{AFC} = \widehat{ABM}$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. *Bạn đọc tự vẽ hình*

Ta có:

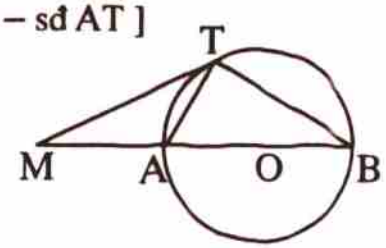
$$\widehat{ESM} = \frac{1}{2}[\text{sđ}\,\widehat{AC} + \text{sđ}\,\widehat{BM}] = \frac{1}{2}[\text{sđ}\,\widehat{CB} + \text{sđ}\,\widehat{BM}] = \widehat{EMS}.$$

Suy ra ΔESM cân tại E ⇒ ES = EM.

Bài 2. Ta có:

$$\widehat{TMB} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\widehat{BT} - \text{sđ}\,\widehat{AT}) = \frac{1}{2}[(\text{sđ}\,\widehat{AB} - \text{sđ}\,\widehat{AT}) - \text{sđ}\,\widehat{AT}]$$

$$= \frac{1}{2}(180^0 - 60^0 - 60^0) = 30^0.$$



Bài 3. *Bạn đọc tự vẽ hình*

Ta có:

$$\hat{A} = \frac{1}{2}[\text{sđ}\,\widehat{CN} - \text{sđ}\,\widehat{BM}]$$

$$\widehat{MSB} = \frac{1}{2}[\text{sđ}\,\widehat{CN} + \text{sđ}\,\widehat{BM}] = \hat{A} + \widehat{BSM} = \text{sđ}C\,\widehat{CN} = 2\,\widehat{CMN}.$$

Bài 4.

a. Từ giả thiết:

$CD \perp AB$ và CD là đường kính $\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$ và $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$.

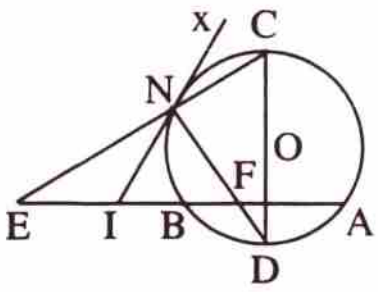
Ta có:

$$\widehat{AEC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AC} - \text{sđ}\overset{\frown}{BN}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{BC} - \text{sđ}\overset{\frown}{BN}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{NC} = \widehat{CNx} = \widehat{INE}$$

$\Leftrightarrow \Delta INE$ cân tại I.

$$\widehat{NFI} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{AD} + \text{sđ}\overset{\frown}{BN}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{BD} + \text{sđ}\overset{\frown}{BN}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{ND} = \widehat{IND}$$

$\Leftrightarrow \Delta INF$ cân tại I.



b. Từ kết quả câu a), ta có:

IE = IN = IF.

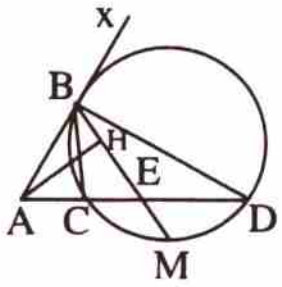
Nhận xét rằng:

AI = AE − IE và AI = AF + IF

$\Rightarrow 2AI = AE + AF \Leftrightarrow AI = \frac{1}{2}(AE + AF)$, đpcm.

Bài 5. *Học sinh tự làm.*

Bài 6.



a. Xét ΔABE, ta nhận thấy:

AH vừa là phân giác vừa là đường cao

$\Leftrightarrow \Delta ABE$ cân tại A $\Leftrightarrow \widehat{ABE} = \widehat{AEB}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BM} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{BC} + \text{sđ}\overset{\frown}{DM})$$

$$\Leftrightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{BC} + \text{sđ}\overset{\frown}{CM} = \text{sđ}\overset{\frown}{BC} + \text{sđ}\overset{\frown}{DM} \Leftrightarrow \text{sđ}\overset{\frown}{CM} = \text{sđ}\overset{\frown}{DM}$$

$\Leftrightarrow \widehat{CBM} = \widehat{DBM} \Leftrightarrow$ BM là tia phân giác của góc $\widehat{CBD}$.

b. Xét hai tam giác ΔBDM và ΔDEM, ta có:

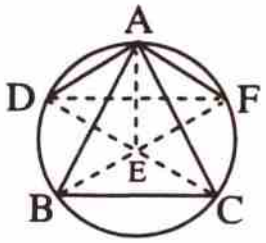
$\hat{M}$ chung

$\widehat{DBM} = \widehat{EDM}$

Do đó:

$$\Delta BDM \sim \Delta DEM \Rightarrow \frac{MD}{ME} = \frac{MB}{MD} \Leftrightarrow MD^2 = ME \cdot MB, \text{ đpcm.}$$

Bài 7. *Hướng dẫn*:



- Chứng minh EDAF là hình bình hành do có các cặp cạnh đối song song.
- Chứng minh $AE \perp DF$ bởi DF // BC.

Vậy, EDAF là một hình thoi.

Bài 8. *Bạn đọc tự vẽ hình*

a. Gọi K là giao điểm của AP và RQ. Ta có:

$$\widehat{AKR} = \frac{1}{2}[\text{sđ}\,\overset{\frown}{AR} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{CQ} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{CP}] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} + \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC} + \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BC}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BC}) = 90^0.$$

Vậy, ta được $AP \perp QR$.

b. Ta có:

$$\widehat{CIP} = \frac{1}{2}[\text{sđ}\,\overset{\frown}{AR} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{CP}] = \frac{1}{2}[\text{sđ}\,\overset{\frown}{BR} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BP}] = \widehat{ICP}$$

Vậy, ta được Δ CPI cân tại P.

Bài 9. Trước hết, từ giả thiết "D, E, F lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ AB, BC, CA ", ta được:

$$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}, \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE}, \overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{AF}.$$

a. Gọi I là giao điểm của AE và DF, ta có ngay:

$$\widehat{AID} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AD} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{EF}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AD} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{EC} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{CF})$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} + \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} + \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{CA})$$

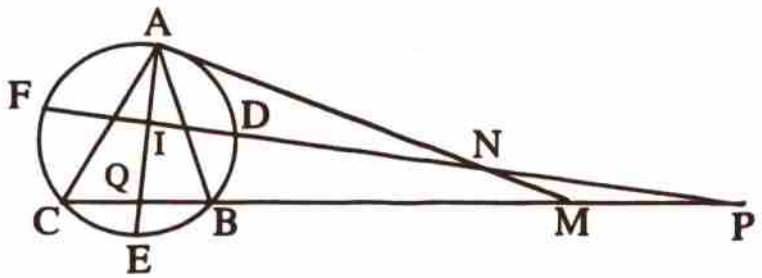
$$= \frac{1}{4}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{CA}) = \frac{1}{4}.360^0 = 90^0$$

$\Leftrightarrow AE \perp DF$, đpcm.

b. Xét ΔMAQ, sử dụng định lí về góc tạo bởi tia tiếp tuyến với một dây và góc có đỉnh ở bên trong đường tròn ta có:

$$\widehat{MAQ} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AE} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BE}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{CE}) = \widehat{AQM}$$

$\Leftrightarrow \Delta MAQ$ cân tại $M \Leftrightarrow MA = MQ$, đpcm.



Xét ΔMNP, sử dụng định lí về góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn và hai góc đối đỉnh ta có:

$$\widehat{MPN} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{CF} - \text{sđ}\,\overset{\frown}{BD}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AF} - \text{sđ}\,\overset{\frown}{AD}) = \widehat{ANF} = \widehat{MNP}$$

$\Leftrightarrow \Delta MNP$ cân tại $M \Leftrightarrow MN = MP$, đpcm.

CHỦ ĐỀ 6

CUNG CHỨA GÓC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. CÁCH GIẢI BÀI TOÁN QUỸ TÍCH

Muốn chứng minh quỹ tích các điểm M thoả mãn tính chất T là một hình H nào đó, ta trình bày như sau:

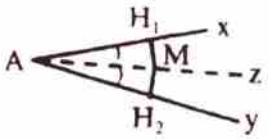
Phần thuận: (*Mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình H*): Gọi M là một điểm bất kì có tính chất T, ta đi chứng minh M thuộc H.
Giới hạn (nếu có).

Phần đảo: (*Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T*): Gọi M là một điểm bất kì thuộc hình H, ta đi chứng minh điểm M có tính chất T.

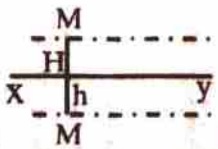
Kết luận: Quỹ tích các điểm M có tính chất T là hình H.

☞ ***Chú ý***: Ta đã học ba quỹ tích cơ bản ở Hình học 7 và một quỹ tích cơ bản ở Hình học 8, cụ thể:

- *Quỹ tích các điểm cách điểm O cố định một khoảng R không đổi là đường tròn (O, R).*



- *Quỹ tích các điểm nằm trong một góc cố định và cách đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc ấy.*
- *Quỹ tích các điểm cách đều hai điểm A, B cố định là đường trung trực của AB.*



- *Quỹ tích các điểm cách đều đường thẳng xy cố định một khoảng h không đổi là hai đường thẳng song song với xy và có khoảng cách đến xy bằng h.*

2. CÁCH GIẢI BÀI TOÁN DỰNG HÌNH

Muốn dựng được điểm M thoả mãn tính chất T, ta đã biết rằng cần trình bày đủ 4 bước:

Phân tích.
Cách dựng.
Chứng minh.
Biện luận.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: TÌM QUỸ TÍCH CÁC ĐIỂM M TẠO THÀNH VỚI HAI MÚT CỦA ĐOẠN THẲNG AB CHO TRƯỚC MỘT GÓC $\widehat{AMB}$ CÓ SỐ ĐO KHÔNG ĐỔI BẰNG α ($0^0 < \alpha < 180^0$)

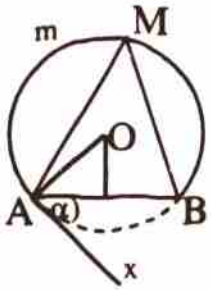
Phương pháp

Để đơn giản, trước hết ta chỉ xét một nửa mặt phẳng có bờ AB.

Phần thuận: Gọi M là điểm thuộc nửa mặt phẳng đang xét thoả mãn $\widehat{AMB} = \alpha$.

Vạch đường tròn (O) ngoại tiếp ΔMAB, thì mọi điểm N nằm trên cung AB chứa đỉnh M của góc $\widehat{AMB}$, ta kí hiệu là $\widehat{AmB}$ (cung còn lại kí hiệu là $\widehat{AnB}$) luôn có:

$\widehat{ANB} = \widehat{AMB} = \alpha$.



Ta cần đi chứng minh đường tròn (O) là xác định không phụ thuộc vào vị trí của điểm M, thật vậy:

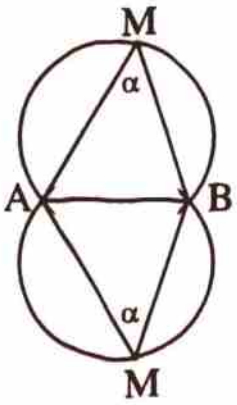
Trong nửa mặt phẳng đối của nửa mặt phẳng đang xét dựng tia Ax sao cho $\widehat{xAB} = \alpha$, suy ra:

Ax là tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Rightarrow$ Ax $\perp$ AO.

Vậy, tâm là giao điểm của đường trung trực của AB với tia Ay vuông góc với Ax.

Phần đảo: Với điểm M bất kỳ thuộc cung $\widehat{AmB}$, ta có:

$\widehat{AMB} = \widehat{xAB} = \alpha$.



Trên mặt phẳng đối của nửa mặt phẳng đang xét, ta có một cung đối xứng đối với cung $\widehat{AmB}$ qua AB.

Kết luận: *Quỹ tích các điểm M tạo thành với hai mút của đoạn thẳng AB cho trước một góc $\widehat{AMB}$ có số đo không đổi bằng α ($0^0 < \alpha < 180^0$), là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB gọi là cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng AB.*

☛ ***Nhận xét***: Ta có:

1. Hai điểm A và B được coi là thuộc quỹ tích, vì:
   - Khi M trùng với A thì góc $\widehat{AMB}$ được thay bởi $\widehat{xAB}$.
   - Khi M trùng với B thì góc $\widehat{AMB}$ được thay bởi $\widehat{ABx'}$.
2. Quỹ tích các điểm M tạo thành với hai mút của đoạn thẳng AB cho trước một góc vuông là đường tròn đường kính AB.

Ví dụ 1: (Bài 44/tr 86 – Sgk): *Cho* ΔABC *vuông ở* A, *có cạnh* BC *cố định. Gọi* I *là giao điểm của ba đường phân giác trong. Tìm quỹ tích điểm* I *khi* A *thay đổi.*

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Ta có:

$$\widehat{BIC} = 180^0 - (\widehat{IBC} + \widehat{ICB}) = 180^0 - \left(\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right)$$

$$= 180^0 - \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}) = 180^0 - \frac{90^0}{2} = 135^0.$$

B, C cố định, A thay đổi, I luôn nhìn cạnh BC dưới một góc 135^0.

Vậy, quỹ tích điểm I là cung chứa góc 135^0 dựng trên cạnh BC đối xứng nhau qua BC.

Ví dụ 2: (Bài 48/tr 87 – Sgk): *Cho hai điểm* A, B *cố định. Từ* A *vẽ các tiếp tuyến với đường tròn tâm* B *có bán kính không lớn hơn* AB. *Tìm quỹ tích các tiếp điểm.*

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Theo tính chất của tiếp tuyến ta có:

$AT \perp BT$

Do đó, A, B cố định, T nhìn AB dưới một góc vuông

Vậy, quỹ tích tiếp tuyến T là đường tròn đường kính AB

Ví dụ 3: *Xét các* ΔABC *có* BC = 6cm *cố định*, $\hat{A} = 120^0$.

a. *Tìm quỹ tích các điểm* A.

b. *Điểm* A *ở vị trí nào thì* ΔABC *có diện tích lớn nhất ? Tính giá trị lớn nhất đó.*

✍ *Giải*

a. Ta thực hiện theo các phần:

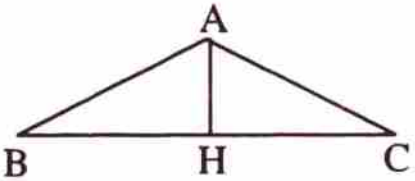
Phần thuận: Do BC cố định, $\widehat{BAC} = 120^0$ nên A di chuyển trên hai cung chứa góc 120^0 dựng trên BC.

Phần đảo: Lấy điểm A thuộc cung chứa góc 120^0 dựng trên BC, ta thấy ngay $\widehat{BAC} = 120^0$.

Kết luận: Quỹ tích điểm A là hai cung chứa góc 120^0 dựng trên đoạn BC.

b. Hạ AH vuông góc với BC, ta có ngay:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH.BC$$



do đó, $S_{\Delta ABC}$ có giá trị lớn nhất khi:

AH lớn nhất ⇔ A là điểm ở chính giữa cung chứa góc.

Khi đó, xét ΔABH vuông tại H, ta có:

$\widehat{BAH} = 60^0 \Rightarrow \widehat{ABH} = 30^0 \Rightarrow AB = 2AH$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Leftrightarrow (2AH)^2 = AH^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 3AH^2 = 9 \Leftrightarrow AH = \sqrt{3}.$$

Do đó $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.6 = 3\sqrt{3}\ cm^2$.

☞ ***Nhận xét***: Trong ví dụ trên, việc chỉ ra quỹ tích của điểm A được suy ra ngay từ giả thiết, do đó các bước thực hiện là rất đơn giản. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp chúng ta cần chỉ ra được *cung chứa góc trong hình vẽ.*

Ví dụ 4: *Cho nửa đường tròn đường kính* AB *và cung* EF *của nửa đường tròn* (E *nằm trên cung* AF *sao cho* $sd\overset{\frown}{EF} = 60^0$. *Hai tia* AE *và* BF *cắt nhau tại* M. *Tìm quỹ tích các điểm* M *khi cung* $\overset{\frown}{EF}$ *chuyển động trên nửa đường tròn.*

✍ *Giải*

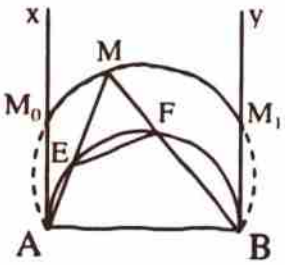
Phần thuận: Giả sử có điểm M sao cho $\overset{\frown}{EF} = 60^0$, ta có:

$$A\hat{M}B = \frac{sd\overset{\frown}{AB} - sd\overset{\frown}{EF}}{2} = \frac{180^0 - 60^0}{2} = 60^0.$$

Vậy điểm M nằm trên cung chứa góc 60^0 dựng trên đoạn thẳng AB (cung này thuộc nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn cho trước).

Giới hạn: Ta có:

- Nếu $E \equiv A \Rightarrow M \equiv M_0$, với M_0 là giao điểm của cung chứa góc với tiếp tuyến Ax của nửa đường tròn đường kính AB.
- Nếu $F \equiv B \Rightarrow M \equiv M_1$, với M_1 là giao điểm của cung chứa góc với tiếp tuyến By của nửa đường tròn đường kính AB.



Do đó, điểm M chỉ nằm trên cung $\overset{\frown}{M_0M_1}$.

Phần đảo: Lấy điểm M nằm trên cung $\overset{\frown}{M_0M_1}$. Nối MA, MB, cắt nửa đường tròn đường kính AB lần lượt tại E và F. Ta phải chứng minh số đo $\overset{\frown}{EF} = 60^0$.

Thật vậy:

$$\overset{\frown}{AMB} = \frac{sd\overset{\frown}{AB} - sd\overset{\frown}{EF}}{2} \Rightarrow sd\overset{\frown}{EF} = sd\overset{\frown}{AB} - 2\overset{\frown}{AMB} = 180^0 - 2.60^0 = 60^0.$$

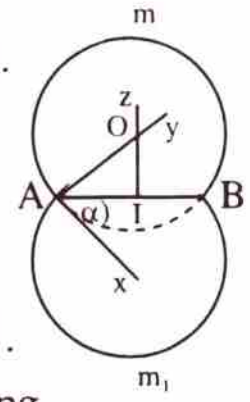
Kết luận: Quỹ tích các điểm M là cung $\overset{\frown}{M_0M_1}$ của cung chứa góc 60^0 dựng trên đoạn thẳng AB (cung này thuộc nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn đã cho).

☞ ***Nhận xét***: Phương pháp giải bài toán trên được tổng quát cho yêu cầu $sd\overset{\frown}{EF} = \alpha$, với $0^0 < \alpha < 180^0$.

Vấn đề 2: DỰNG CUNG CHỨA GÓC α ($0^0 < \alpha < 180^0$) TRÊN ĐOẠN AB = a CHO TRƯỚC

Phương pháp

Ta lần lượt thực hiện:



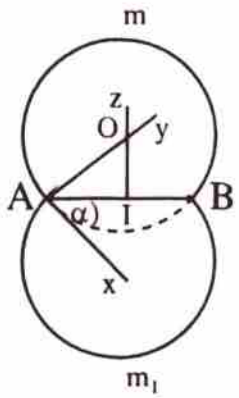
- Dựng đoạn AB = a và đường trung trực Iz của AB.
- Dựng tia Ax sao cho $\widehat{xAB} = \alpha$.
- Dựng tia Ay vuông góc với Ax cắt Iz tại O.
- Dựng đường tròn (O, OA) và chỉ lấy phần cung cùng phía với O, kí hiệu $\overset{\frown}{AmB}$.
- Lấy đối xứng cung $\overset{\frown}{AmB}$ qua AB được cung $\overset{\frown}{Am_1B}$.

Vậy, hai cung $\overset{\frown}{AmB}$ và $\overset{\frown}{Am_1B}$ là cung chứa góc cần dựng.

☞ ***Nhận xét***:

1. Như vậy, nếu chỉ với yêu cầu dựng cung chứa góc chúng ta chỉ cần trình bày phần cách dựng. Tuy nhiên với bài toán sử dụng kết quả cung chứa góc để dựng hình (ví dụ dựng tam giác...) chúng ta cần trình bày đủ 4 bước.
2. Trong trường hợp đặc biệt với $\alpha = 90^0$, chúng ta đã biết được cách dựng đơn giản hơn nhiều, vì nó chính là đường tròn đường kính AB.

Ví dụ 1: *Dựng cung chứa góc* 60^0 *trên đoạn* AB = 4cm.



✍ *Giải*

Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đoạn AB = 4cm và đường trung trực Iz của AB.
- Dựng tia Ax sao cho $\widehat{xAB} = 60^0$.
- Dựng tia Ay vuông góc với Ax cắt Iz tại O.
- Dựng đường tròn (O, OA) và chỉ lấy phần cung cùng phía với O, kí hiệu $\overset{\frown}{AmB}$.
- Lấy đối xứng cung $\overset{\frown}{AmB}$ qua AB được cung $\overset{\frown}{Am_1B}$.

Vậy, hai cung $\overset{\frown}{AmB}$ và $\overset{\frown}{Am_1B}$ là cung chứa góc góc cần dựng.

Ví dụ 2: (Bài 49/tr 87 – Sgk): *Dựng* ΔABC, *biết* BC = 6cm, $\hat{A} = 40^0$ *và đường cao* AH = 4cm.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Phân tích:

- Giả sử dựng được ΔABC thoả mãn điều kiện:
  BC = 6cm, $\hat{A} = 40^0$, AH = 4cm.

- Khi đó, điểm A nằm ngoài đường thẳng d song song với đường tròn BC và cách BC 4cm.
- Mặt khác, $\widehat{BAC} = 40^0$ nên A nằm trên cung chứa góc 40^0 dựng trên BC.

Cách dựng:

- Trên đường thẳng Δ lấy đoạn thẳng BC = 6cm.
- Dựng các đường thẳng d_1 // Δ và d_2 // Δ cách Δ một khoảng 4cm.
- Dựng các cung chứa góc 40^0 dựng trên BC là $\widehat{BmC} = 40^0$, $\widehat{BnC} = 40^0$ và cắt d_1 và d_2 tại A_1, A_2, A_3, A_4.

Vậy, các ΔA_1BC, ΔA_2BC, ΔA_3BC, ΔA_4BC thoả mãn các điều kiện đề bài.

Ví dụ 3: *Dựng* ΔABC *biết* BC = a, $\hat{A} = \alpha$ ($0^0 < \alpha < 90^0$) *và đường cao* BH = h *với* h < a.

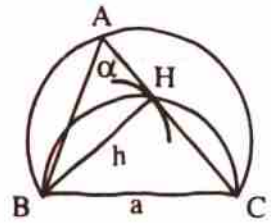
Giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được ΔABC thoả mãn điều kiện đầu bài, ta thấy:

a. Cạnh BC = a dựng được ngay

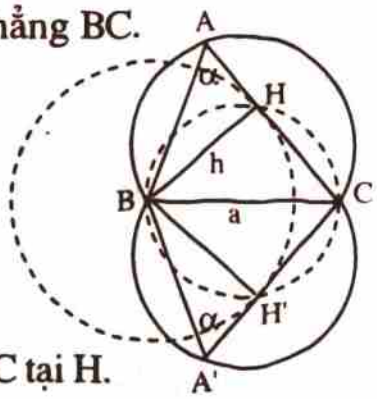
b. Điểm H thoả mãn hai điều kiện:
   - H nằm trên đường tròn đường kính BC.
   - H nằm trên đường tròn (B, h).

   Vậy H là giao của hai đường tròn đó.



c. Điểm A thoả mãn hai điều kiện:
   - A nằm trên cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng BC.
   - A nằm trên tia CH.

   Vậy A là giao điểm của tia CH với cung chứa góc α.



Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đoạn BC = a.
- Dựng cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng BC.
- Dựng đường tròn đường kính BC.
- Dựng đường tròn (B, h) cắt đường tròn đường kính BC tại H.
- Tia CH cắt cung chứa góc α tại A.
- Nối AB ta được ΔABC phải dựng.

Chứng minh: Ta có ngay:

BC = a theo cách dựng.

$\hat{A} = \alpha$ – vì A nằm trên cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng BC.

BH = h – vì H thuộc đường tròn (B, h).

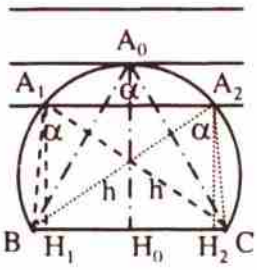
$\widehat{BHC} = 90^0 \Rightarrow$ BH = h là đường cao của ΔABC.

Vậy, ΔABC thoả mãn điều kiện đầu bài.

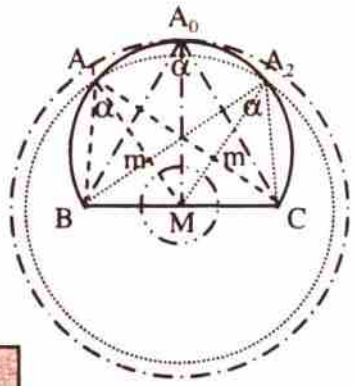
Biện luận: Ta dựng được hai ΔABC và ΔA'BC thoả mãn điều kiện đề bài, nhưng hai tam giác này bằng nhau (đối xứng qua BC) nên bài toán chỉ có một nghiệm hình (bài toán này là bài toán dựng hình về kích thước).

☞ *Nhận xét*:

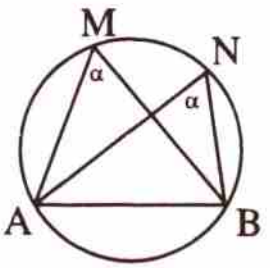
1. Qua ví dụ trên ta thấy giải một bài toán dựng hình thường được quy về việc xác định một điểm thoả mãn hai điều kiện. Điểm cần xác định là giao của hai quỹ tích (cũng có khi là giao của một quỹ tích với một đường thẳng hoặc một đường tròn cho trước). Số nghiệm hình của bài toán phụ thuộc vào số giao điểm của hai quỹ tích. Phương pháp dựng hình như vậy gọi là *phương pháp quỹ tích tương giao*.
2. Nếu thay giả thiết đường cao BH = h bằng đường cao AH = h, khi đó A thuộc đường thẳng song song với BC và cách BC một khoảng bằng h, và trong trường hợp này bài toán có thể vô nghiệm hình, có một nghiệm hình hoặc hai nghiệm hình, vì nó phụ thuộc vào số giao điểm của đường thẳng với cung chứa góc .



3. Nếu thay giả thiết đường cao BH = h bằng đường trung tuyến AM = m, khi đó A thuộc đường tròn (M, m) với M là trung điểm BC, và trong trường hợp này bài toán có thể vô nghiệm hình, có một nghiệm hình hoặc hai nghiệm hình, vì nó phụ thuộc vào số giao điểm của đường tròn với cung chứa góc.



Vấn đề 3: SỬ DỤNG QUỸ TÍCH CUNG CHỨA GÓC CHỨNG MINH NHIỀU ĐIỂM CÙNG NẰM TRÊN MỘT ĐƯỜNG TRÒN



Phương pháp

Việc sử dụng quỹ tích cung chứa góc α để chứng minh nhiều điểm cùng nằm trên một đường tròn, dựa trên nhận xét:

" *Nếu các điểm M, N nằm cùng phía đối với AB và* $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$ *thì bốn điểm* A, M, N, B *cùng thuộc một đường tròn*".

☞ ***Chú ý***: Điều kiện cùng phía của các điểm M, N đối với AB là bắt buộc, bởi trong trường hợp khác phía chỉ đúng với:

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^0.$$

Ví dụ 1: (Bài 51/tr 87 – Sgk): *Cho* I, O *lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác* ABC *với* $\hat{A} = 60^0$. *Gọi* H *là giao điểm của các đường cao* BB' *và* CC'. *Chứng minh các điểm* B, C, O, H, I *cùng thuộc một đường tròn.*

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Xét tứ giác AB'HC', ta có:

$$\widehat{B'HC'} = 360^2 - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = 360^0 - (60^0 + 90^0 + 90^0) = 120^0.$$

$$\Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{B'HC'} = 120^0$$

Xét ΔBIC, ta có:

$$\widehat{BIC} = 180^0 - (\widehat{IBC} + \widehat{ICB}) = 180^0 - \left(\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right) = 180^0 - \frac{1}{2}(180^0 - \hat{A}) = 120^0.$$

Như vậy, H và I đều nằm trên cung chứa góc 120^0 dựng trên BC.

Mặt khác, ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm O nên góc nội tiếp BÂC trong đường tròn (O) có số đo là:

$$60^0 = \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \text{ sđ } \widehat{BC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^0$$

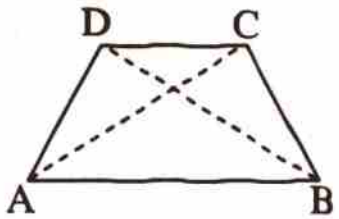
Vậy, O nằm trên cung chứa góc 120^0 dựng trên BC. Nghĩa là 5 điểm B, C, O, H, I nằm trên cùng một đường tròn chứa cung chứa góc 120^0 dựng trên BC.

Ví dụ 2: *Cho hình thang cân* ABCD (AB // CD). *Chứng minh rằng bốn điểm* A, B, C, D *thuộc cùng một đường tròn.*

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Xét hai tam giác ΔABD và ΔBAC, ta có:



AB chung

$\widehat{BAD} = \widehat{ABC}$, vì ABCD là hình thang cân

AD = BC, vì ABCD là hình thang cân

Do đó:

$$\Delta ABD = \Delta BAC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACB}.$$

Vậy, các điểm C, D nằm phía đối với AB và thoả mãn $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ nên bốn điểm A, B, C, D thuộc cùng một đường tròn.

Cách 2: Xét hai tam giác ΔACD và ΔBDC, ta có:

CD chung

$\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$, vì ABCD là hình thang cân

AD = BC, vì ABCD là hình thang cân

Do đó:

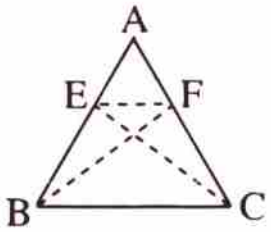
$$\Delta ACD = \Delta BDC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{CBD}.$$

Vậy, các điểm A, B nằm phía đối với CD và thoả mãn $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ nên bốn điểm A, B, C, D thuộc cùng một đường tròn.

☞ *Nhận xét*: Đường tròn đi qua bốn đỉnh của hình thang ABCD được gọi là " *Đường tròn ngoại tiếp ABCD* " hoặc " *Hình thang ABCD nội tiếp đường tròn này* ".

Ví dụ 3: *Cho* ΔABC *cân tại* A. *Lấy hai điểm* E, F *theo thứ tự thuộc* AB, AC *sao cho* AE = AF. *Chứng minh rằng bốn điểm* B, C, E, F *thuộc cùng một đường tròn.*

✍ *Giải*



Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Xét hai tam giác ΔABF và ΔACE, ta có:

AB = AC, vì ΔABC cân tại A

Â chung

AF = AE, giả thiết

Do đó: $\Delta ABF = \Delta ACE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ABF} = \widehat{ACE} \Leftrightarrow \widehat{EBF} = \widehat{FCE}$.

Vậy, các điểm B, C nằm phía đối với EF và thoả mãn $\widehat{EBF} = \widehat{FCE}$ nên bốn điểm B, C, E, F thuộc cùng một đường tròn.

Cách 2: Chứng minh như trong cách 1, ta được:

$\Delta ABF = \Delta ACE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AFB} = \widehat{AEC}$

$\Leftarrow 180^0 - \widehat{AFB} = 180^0 - \widehat{AEC} \Leftrightarrow \widehat{CFB} = \widehat{BEC}$.

Vậy, các điểm B, C nằm phía đối với EF và thoả mãn $\widehat{EBF} = \widehat{FCE}$ nên bốn điểm B, C, E, F thuộc cùng một đường tròn.

Cách 3: Xét hai tam giác ΔEBC và ΔFCB, ta có:

EB = AB − AE = AC − AF = FC, vì ΔABC cân tại A

$\widehat{EBC} = \widehat{FCB}$, vì ΔABC cân tại A

BC chung do đó: $\Delta EBC = \Delta FCB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{CFB}$.

Vậy, các điểm E, F nằm phía đối với BC và thoả mãn $\hat{BEC} = \hat{CFB}$ nên bốn điểm B, C, E, F thuộc cùng một đường tròn.

Vấn đề 4 TOÁN TỔNG HỢP

Ví dụ 1: (Bài 47/tr 86 − Sgk): *Gọi cung chứa góc* 55^0 *ở bài tập 46 là* $\widehat{AmB}$. *Lấy điểm* M_1 *nằm bên trong và điểm* M_2 *nằm bên ngoài đường tròn chứa cung này sao cho* M_1, M_2 *và cung* $\widehat{AmB}$ *nằm cùng một phía đối với đường thẳng* AB. *Chứng minh rằng:*

a. $\widehat{AM_1B} > 55^0$.

b. $\widehat{AM_2B} < 55^0$.

Giải – Bạn đọc tự vẽ hình

Giả sử $\overset{\frown}{AmB}$ là cung chứa góc 55^0 dựng trên đoạn AB. Điểm M_1 nằm trong đường tròn chứa cung $\overset{\frown}{AmB}$. Đường thẳng AM_1 cắt cung $\overset{\frown}{AmB}$ tại C. Nối BC.

Ta có: $AM_1B = ACB + CBM_1 > ACB = 55^0$.

Điểm M_2 ngoài đường tròn chứa cung $\overset{\frown}{AmB}$.

Gọi D là giao điểm của M_2B với cung $\overset{\frown}{AmB}$.

Nối A với D, ta có: $\overset{\frown}{AM_2B} + \overset{\frown}{M_2AD} = \overset{\frown}{ADB}$ $ADB = 55^0 \Rightarrow \overset{\frown}{AM_2B} < 55^0$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho các hình thoi ABCD có cạnh AB cố định. Tìm quỹ tích giao điểm O của hai đường chéo của các hình thoi đó.

Bài 2. Xét các ΔABC có BC = 2cm cố định, $\hat{A} = 60^0$.

a. Tìm quỹ tích các điểm A.

b. Điểm A ở vị trí nào thì ΔABC có diện tích lớn nhất ? Tính giá trị lớn nhất đó.

Bài 3. Cho nửa đường tròn đường kính AB và cung EF của nửa đường tròn (E nằm trên cung AF sao cho sđ $\overset{\frown}{EF} = 30^0$. Hai tia AE và BF cắt nhau tại M. Tìm quỹ tích các điểm M khi cung $\overset{\frown}{EF}$ chuyển động trên nửa đường tròn.

Bài 4. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm E, trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho CE = CF. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng DE và BF. Tìm quỹ tích các điểm M khi E di động trên cạnh BC.

Bài 5. Cho ΔABC vuông góc ở A. Vẽ hai nửa đường tròn đường kính AB và AC ra phía ngoài của tam giác. Qua A vẽ cát tuyến MAN (M thuộc nửa đường tròn đường kính AB, N thuộc nửa đường tròn đường kính AC).

a. Tứ giác BCNM là hình gì ?

b. Tìm quỹ tích trung điểm I của MN khi cát tuyến MAN quay quanh A.

Bài 6. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB cố định, điểm C di chuyển trên nửa đường tròn. Ở phía ngoài ΔABC, vẽ ΔBCD vuông cân tại C. Tìm quỹ tích các điểm D.

Bài 7. Cho ΔABC có $\hat{A} = 60^0$, nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ AC lấy một điểm D. Trên dây BD lấy điểm M sao cho DM = DC.

a. Chứng minh rằng ΔMCD là tam giác đều.

b. Tìm quỹ tích các điểm M khi điểm D di động trên cung nhỏ AC.

Bài 8. Cho cung một phần tư đường tròn với hai bán kính OA, OB vuông góc với nhau. Trên cung này lấy một điểm C tuỳ ý không trùng với A và B. Vẽ CH vuông góc với OA. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔHOC.

a. Chứng minh rằng ΔAIO = ΔCIO.

b. Tìm quỹ tích các điểm I khi C di động trên cung AB.

Bài 8. Dựng cung chứa góc 45^0 trên đoạn AB = 4cm.

Bài 9. Dựng ΔABC biết BC = 3cm, $\hat{A} = 50^0$ và AB = 2cm.

Bài 10. Dựng ΔABC biết:

a. BC = 4cm, $\hat{A} = 60^0$ và đường cao BH = 3cm.

b. BC = 6cm, $\hat{A} = 45^0$ và đường cao BH = 4cm.

Bài 11. Dựng ΔABC biết:

a. BC = 8cm, $\hat{A} = 60^0$ và đường cao AH = 6cm.

b. BC = 6cm, $\hat{A} = 120^0$ và đường cao AH = $\sqrt{3}$ cm.

c. BC = 4cm, $\hat{A} = 60^0$ và đường cao AH = 9cm.

Bài 12. Dựng ΔABC biết:

a. BC = 6cm, $\hat{A} = 45^0$ và trung tuyến AM = 5cm.

b. BC = 4cm, $\hat{A} = 60^0$ và trung tuyến AM = $2\sqrt{3}$ cm.

Bài 13. Dựng tam giác vuông biết:

a. Cạnh huyền 6cm, bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1cm.

b. Cạnh huyền 5cm, bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1cm.

Bài 14. Cho ΔABC cân tại A. Đường thẳng d song song với BC, cắt các cạnh AB và AC theo thứ tự tại E và F. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, F thuộc cùng một đường tròn.

Bài 15. Cho ΔABC có $\hat{B}$, $\hat{C}$ là các góc nhọn, đường cao AH, trung tuyến AM thoả mãn $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$. Gọi E là trung điểm của AB.

a. Hỏi ΔAEH là tam giác gì ?

b. Chứng minh rằng A, E, H, M thuộc cùng một đường tròn.

c. Chứng minh ΔABC là tam giác vuông.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. *Bạn đọc tự vẽ hình*

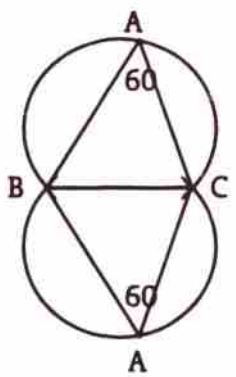
Theo tính chất của hình thoi, các đường chéo hình thoi vuông góc nhau.

Do đó, nếu cạnh AB cố định, giao điểm O của các đường chéo hình thoi ABCD nhìn AB dưới một góc 90^0 không đổi.

Vậy, quỹ tích giao điểm O của hai đường chéo hình thoi ABCD khi AB cố định là đường tròn đường kính AB.

Bài 2.

a. Quĩ tích điểm A thuộc cung chứa góc 60^0 dựng trên cạnh BC.



b. Hạ AH vuông góc với BC, ta có ngay: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC$

Do đó, $S_{\Delta ABC}$ có giá trị lớn nhất khi:

AH lớn nhất ⇔ A là điểm ở chính giữa cung chứa góc.

Khi đó, vì ΔABC đều nên: $S_{\Delta ABC} = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ cm^2.

Bài 3. Tham khảo ví dụ 2.

Bài 4. *Học sinh tự vẽ hình.*

Phần thuận: Xét hai tam giác vuông ΔBCF và ΔDCE, ta có:

BC = DC, vì ABCD là hình vuông, CF = CE, giả thiết

Do đó: ΔBCF = ΔDCE (hai cạnh góc vuông) ⇒ $\widehat{CBF} = \widehat{CDE}$.

Mặt khác ta có nhận xét: $\widehat{BEM} = \widehat{CED}$, vì đối đỉnh

$90^0 = \widehat{CDE} + \widehat{CED} = \widehat{CBF} + \widehat{BEM} \Rightarrow \widehat{BMD} = 90^0$.

Vậy, điểm M nằm trên đường tròn đường kính BD.

Giới hạn:

- Nếu điểm E trùng với điểm B thì điểm M trùng với điểm B.
- Nếu điểm E trùng với điểm C thì điểm M trùng với điểm C.

Do đó, điểm M chỉ nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn đường kính BD.

Phần đảo: Lấy điểm M nằm trên cung $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn đường kính BD. Nối BM cắt CD tại F, nối DM cắt BC tại E. Ta phải chứng minh CE = CF.

Thật vậy: $\widehat{BMD} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

⇒ ΔBCF = ΔDCE (g.c.g) ⇒ CF = CE.

Kết luận: Quỹ tích các điểm M là cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn đường kính BD.

Bài 5.

a. Xét tứ giác BCNM, ta có:

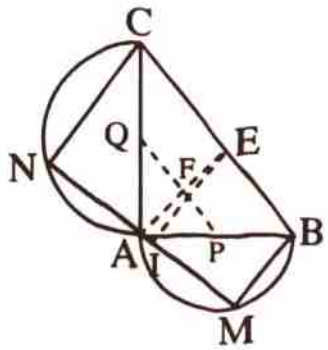
$\widehat{AMB} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn ⇒ BM ⊥ MN

$\widehat{ANC} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn ⇒ CN ⊥ MN

do đó BM // CN.

Vậy, tứ giác BCNM là hình thang vuông.

b. Ta thực hiện theo các phần:



Phần thuận: Gọi E là trung điểm BC, ta có ngay:

EI là đường trung bình của hình thang BCNM

⇒ EI // CN ⇒ EI ⊥ MN ⇔ $\widehat{AIE} = 90^0$.

Vậy, điểm M nằm trên đường tròn đường kính AE.

Giới hạn: Ta có:

- Nếu M ≡ B ⇒ N ≡ A ⇒ I ≡ P là trung điểm của AB.
- Nếu M ≡ A ⇒ N ≡ C ⇒ I ≡ Q là trung điểm của AC.

Do đó, điểm I chỉ nằm trên cung $\overset{\frown}{PQ}$ của đường tròn đường kính AE.

Phần đảo: Lấy điểm I nằm trên cung $\overset{\frown}{PQ}$ của đường tròn đường kính AE. Nối AI cắt (AB) và (AC) theo thứ tự tại M và N. Ta phải chứng minh MI = NI.

Thật vậy: $\widehat{AIE} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn ⇔ EI ⊥ MN

⇔ EI // BM ⇒ EI là đường trung bình của hình thang BCNM ⇒ MI = NI.

Kết luận: Quỹ tích các điểm I nằm trên cung $\overset{\frown}{PQ}$ của đường tròn đường kính AE.

Bài 6.

Phần thuận: Ta có ngay:

$\widehat{ADB} = 45^0$.

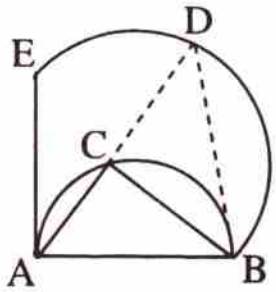
Do AB cố định, $\widehat{ADB} = 45^0$ nên D di chuyển trên cung chứa góc 45^0 dựng trên AB.

Giới hạn: Ta có:

- Nếu $C \equiv A \Rightarrow D \equiv E$ (E là giao điểm của của đường thẳng qua A vuông góc với AB với cung chứa góc 45^0 dựng trên AB thuộc nửa mặt phẳng có bờ AB chứa điểm C).
- Nếu $C \equiv B \Rightarrow D \equiv B$.

Do đó, điểm D chỉ nằm trên cung $\overset{\frown}{BE}$ của cung chứa góc 45^0 dựng trên AB thuộc nửa mặt phẳng có bờ AB chứa nửa đường tròn.

Phần đảo: Lấy điểm D thuộc cung $\overset{\frown}{BE}$ của cung chứa góc 45^0 dựng trên AB thuộc nửa mặt phẳng có bờ AB chứa nửa đường tròn (O). Nối AD cắt nửa đường tròn (O) tại C. Ta phải chứng minh ΔBCD vuông cân tại C.



Thật vậy, xét ΔBCD, ta có:

$\widehat{BCD} = 90^0$, vì $\widehat{ACB} = 90^0$

$\widehat{CDB} = 45^0$

Do đó ΔBCD vuông cân tại C.

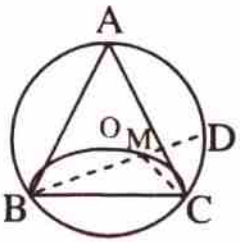
Kết luận: Quỹ tích điểm D thuộc cung $\overset{\frown}{BE}$ của cung chứa góc 45^0 dựng trên AB thuộc nửa mặt phẳng có bờ AB chứa nửa đường tròn (O).

Bài 7.

a. Xét ΔMCD, ta có: DM = DC, giả thiết

$\widehat{CDM} = \widehat{CDB} = \widehat{CAB} = 60^0$

do đó, ΔMCD là tam giác đều.



b. Ta thực hiện theo các phần:

Phần thuận: Từ kết quả câu a), ta có:

$\widehat{BMC} = 180^0 - \widehat{CMD} = 180^0 - 60^0 = 120^0$

Do BC cố định, $\widehat{BMC} = 120^0$ nên M di chuyển trên cung chứa góc 120^0 dựng trên BC.

Giới hạn Vì D chỉ chạy trên cung $\overset{\frown}{AC}$ nên M chỉ chạy trên một cung chứa góc 120^0 dựng trên BC thuộc nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A.

Phần đảo: Lấy điểm M thuộc cung chứa góc 120^0 dựng trên BC thuộc nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A. Ta phải chứng minh DM = DC.

Thật vậy, xét ΔMCD, ta có:

$\widehat{CDM} = \widehat{CAB} = 60^0$

$\widehat{CMD} = 180^0 - \widehat{BMC} = 180^0 - 120^0 = 60^0$

Do đó: ΔMCD là tam giác đều $\Rightarrow$ DM = DC.

Kết luận: Quỹ tích điểm M là một cung chứa góc 120^0 dựng trên BC thuộc nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A.

Bài 8.

a. Xét hai tam giác ΔAIO và ΔCIO, ta có:

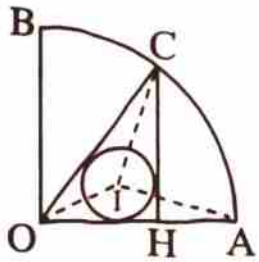
OI chung

$\widehat{AOI} = \widehat{COI}$, vì I là tâm đường tròn nội tiếp ΔHOC nên OI là phân giác của Ô

OA = OC

Do đó:

ΔAIO = ΔCIO (c.g.c).



b. Ta thực hiện theo các phần:

Phần thuận: Từ kết quả câu a), ta có:

$$\widehat{AIO} = \widehat{CIO} = 180^0 - (\widehat{IOC} + \widehat{ICO}) = 180^0 - \frac{1}{2}(\widehat{HOC} + \widehat{HCO})$$

$$= 180^0 - 45^0 = 135^0.$$

Do AO cố định, $\widehat{AIO} = 135^0$ nên I di chuyển trên cung chứa góc 135^0 dựng trên AO.

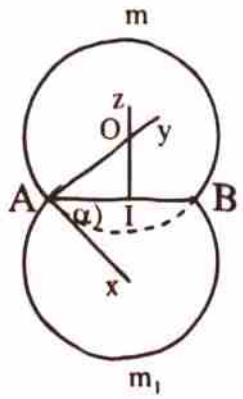
Giới hạn: Vì C chỉ chạy trên cung $\overset{\frown}{AB}$ nên I chỉ chạy trên một cung chứa góc 135^0 dựng trên AO thuộc nửa mặt phẳng bờ AO có chứa điểm B.

Phần đảo: Học sinh tự làm.

Kết luận: Học sinh tự làm.

Bài 8. Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đoạn AB = 4cm và đường trung trực Iz của AB.
- Dựng tia Ax sao cho $\widehat{xAB} = 45^0$.
- Dựng tia Ay vuông góc với Ax cắt Iz tại O.
- Dựng đường tròn (O, OA) và chỉ lấy phần cung cùng phía với O, kí hiệu $\overset{\frown}{AmB}$.
- Lấy đối xứng cung $\overset{\frown}{AmB}$ qua AB được cung $\overset{\frown}{Am_1B}$.



Vậy, hai cung $\overset{\frown}{AmB}$ và $\overset{\frown}{Am_1B}$ là cung chứa góc góc cần dựng.

Bài 9. Ta lần lượt thực hiện:

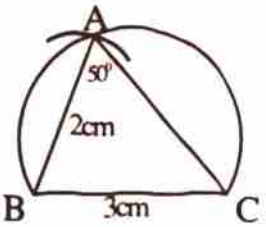
Phân tích: Giả sử đã dựng được ΔABC thoả mãn điều kiện đầu bài, ta thấy:

a. Cạnh BC = 3cm dựng được ngay.

b. Điểm A thoả mãn hai điều kiện:

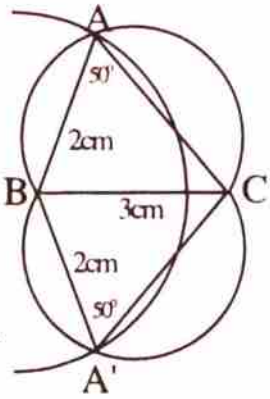
- Vì $\widehat{BAC} = 50^0$ nên A nằm trên cung chứa góc 50^0 dựng trên đoạn thẳng BC.
- Vì AB = 2cm nên A nằm trên đường tròn (B, 2cm).

Vậy A là giao điểm của hai hình trên.



Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đoạn BC = 3cm.
- Dựng cung chứa góc 50^0 dựng trên đoạn thẳng BC.
- Dựng đường tròn (B, 2cm) cắt cung chứa góc ở trên tại A..
- Nối AB, AC ta được ΔABC phải dựng.



Chứng minh: Ta có ngay:

BC = 3cm theo cách dựng.

$\hat{A} = 50^0$ – vì A nằm trên cung chứa góc 50^0 dựng trên đoạn BC.

AB = 2cm, A nằm trên đường tròn (B, 2cm).

Vậy, ΔABC thoả mãn điều kiện đầu bài.

Biện luận : Ta dựng được hai ΔABC và ΔA'BC thoả mãn điều kiện đề bài, nhưng hai tam giác này bằng nhau (đối xứng qua BC) nên bài toán chỉ có một nghiệm hình (bài toán này là bài toán dựng hình về kích thước).

Bài 10.

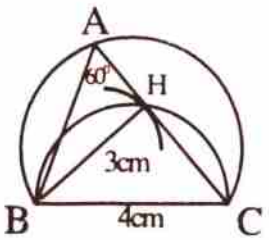
a. Ta lần lượt thực hiện:

Phân tích: Giả sử đã dựng được ΔABC thoả mãn điều kiện đầu bài, ta thấy:

- Cạnh BC = 4cm dựng được ngay.
- Điểm H thoả mãn hai điều kiện:
  - H nằm trên đường tròn đường kính BC.
  - H nằm trên đường tròn (B, 3cm).

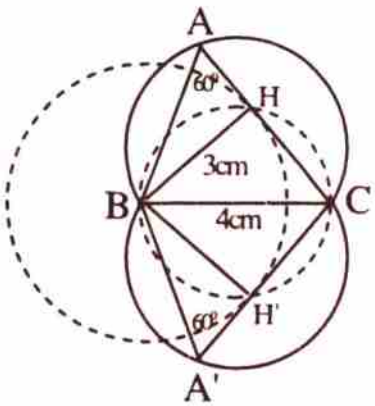
  Vậy H là giao của hai đường tròn đó.
- Điểm A thoả mãn hai điều kiện:
  - A nằm trên cung chứa góc 60^0 dựng trên đoạn thẳng BC.
  - A nằm trên tia CH.

  Vậy A là giao điểm của tia CH với cung chứa góc 60^0.



Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đoạn BC = 4cm.
- Dựng cung chứa góc 60^0 dựng trên đoạn thẳng BC.
- Dựng đường tròn đường kính BC.
- Dựng đường tròn (B, 3cm) cắt đường tròn đường kính BC tại H.
- Tia CH cắt cung chứa góc 60^0 tại A.
- Nối AB ta được ΔABC phải dựng.



Chứng minh: Ta có ngay:

BC = 4cm theo cách dựng.

$\hat{A} = 60^0$, vì A nằm trên cung chứa góc 60^0 dựng trên đoạn BC.

BH = 3cm, vì H thuộc đường tròn (B, 3cm).

$\widehat{BHC} = 90^0$, vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Rightarrow$ BH = 3cm là đường cao của ΔABC.

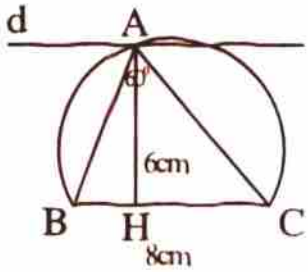
Vậy, ΔABC thoả mãn điều kiện đầu bài.

Biện luận: Ta dựng được hai ΔABC và ΔA'BC thoả mãn điều kiện đề bài, nhưng hai tam giác này bằng nhau (đối xứng qua BC) nên bài toán chỉ có một nghiệm hình (bài toán này là bài toán dựng hình về kích thước).

b. *Học sinh tự làm tương tự câu a).*

Bài 11.

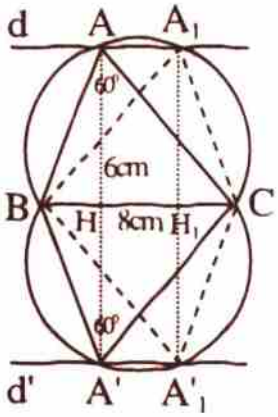
a. Ta lần lượt thực hiện:



Phân tích: Giả sử đã dựng được ΔABC thoả mãn điều kiện đầu bài, ta thấy:

- Cạnh BC = 8cm dựng được ngay.
- Điểm A thoả mãn hai điều kiện:
  - A nằm trên cung chứa góc 60^0 dựng trên đoạn thẳng BC.
  - A nằm trên đường thẳng d song song và cách BC một khoảng bằng 6cm.

Vậy A là giao điểm của d với cung chứa góc 60^0.



Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đoạn BC = 8cm.
- Dựng cung chứa góc 60^0 dựng trên đoạn thẳng BC.
- Dựng đường thẳng d song song và cách BC một khoảng bằng 6cm, đường thẳng d cắt cung chứa góc 60^0 tại A.
- Nối AB, AC ta được ΔABC phải dựng.

Chứng minh: Ta có ngay:

BC = 8cm theo cách dựng.

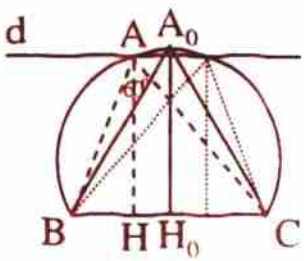
$\hat{A} = 60^0$, vì A nằm trên cung chứa góc 60^0 dựng trên đoạn BC.

AH = 6cm, vì A thuộc đường thẳng d song song và cách BC một khoảng bằng 6cm.

Vậy, ΔABC thoả mãn điều kiện đầu bài.

Biện luận: Để xác định xem bài toán có bao nhiên nghiệm hình ta cần tính độ dài A_0H_0, trong đó A_0 là điểm chỉnh giữa cung chứa góc 60^0 và H_0 là hình chiếu vuông góc của A_0 lên BC.

Trong ΔA_0BC cân tại A, ta có:



$$\widehat{BA_0C} = 60^0 \Rightarrow \Delta A_0BC \text{ đều}$$

$$\Rightarrow A_0H_0 = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} > 6 = AH$$

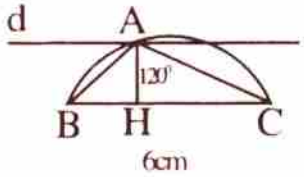
do đó, đường thẳng d cắt mỗi cung chứa góc tại hai điểm phân biệt.

Vậy, bài toán có hai nghiệm hình.

b. Ta lần lượt thực hiện:

Phân tích Giả sử đã dựng được ΔABC thoả mãn điều kiện đầu bài, ta thấy:

- Cạnh BC = 6cm dựng được ngay.
- Điểm A thoả mãn hai điều kiện:
  - A nằm trên cung chứa góc 120^0 dựng trên đoạn thẳng BC.
  - A nằm trên đường thẳng d song song và cách BC một khoảng bằng $\sqrt{3}$ cm.



Vậy A là giao điểm của d với cung chứa góc 120^0.

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đoạn BC = 6cm.
- Dựng cung chứa góc 120^0 dựng trên đoạn thẳng BC.
- Dựng đường thẳng d song song và cách BC một khoảng bằng $\sqrt{3}$ cm, đường thẳng d cắt cung chứa góc 120^0 tại A.
- Nối AB, AC ta được ΔABC phải dựng.

Chứng minh: Ta có ngay:

BC = 6cm theo cách dựng.

$\hat{A} = 120^0$, vì A nằm trên cung chứa góc 120^0 dựng trên đoạn BC.

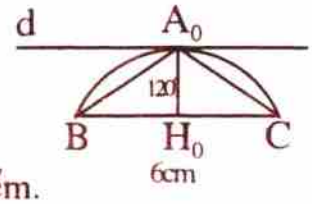
AH = $\sqrt{3}$ cm, vì A thuộc đường thẳng d song song và cách BC một khoảng bằng $\sqrt{3}$ cm. Vậy, ΔABC thoả mãn điều kiện đầu bài.

Biện luận: Để xác định xem bài toán có bao nhiêu nghiệm hình ta cần tính độ dài A_0H_0, trong đó A_0 là điểm chính giữa cung chứa góc 120^0 và H_0 là hình chiếu vuông góc của A_0 lên BC. Trong ΔA_0BH_0 vuông tại H, ta có:

$\widehat{BA_0H_0} = 60^0 \Rightarrow \widehat{A_0BH_0} = 30^0 \Rightarrow A_0B = 2A_0H_0$

$A_0B^2 = A_0H_0^2 + BH_0^2$

$\Leftrightarrow 4A_0H_0^2 = A_0H_0^2 + 9 \Leftrightarrow A_0H_0 = \sqrt{3} = AH$



do đó, đường thẳng d cắt mỗi cung chứa góc tại duy nhất một điểm.

Vậy, bài toán có một nghiệm hình.

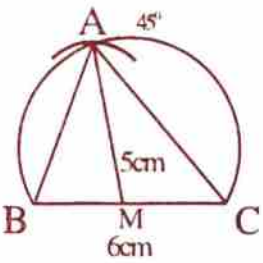
c. *Học sinh tự làm tương tự câu a) và b).*

Bài 12.

a. Ta lần lượt thực hiện:

Phân tích Giả sử đã dựng được ΔABC thoả mãn điều kiện đầu bài, ta thấy:

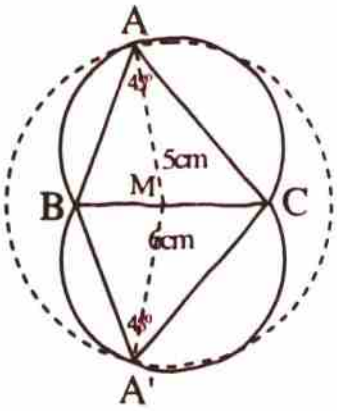
- Cạnh BC = 6cm dựng được ngay.
- Điểm A thoả mãn hai điều kiện:
  - A nằm trên cung chứa góc 45^0 dựng trên đoạn thẳng BC.
  - A nằm trên đường tròn (M, 5cm) với M là trung điểm BC.



Vậy A là giao điểm của (M, 5cm) với cung chứa góc 60^0.

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đoạn BC = 6cm.
- Dựng cung chứa góc 45^0 dựng trên đoạn thẳng BC.
- Dựng đường tròn (M, 5cm) cắt cung chứa góc 45^0 tại A.
- Nối AB, AC ta được ΔABC phải dựng.



Chứng minh: Ta có ngay:

BC = 6cm theo cách dựng.

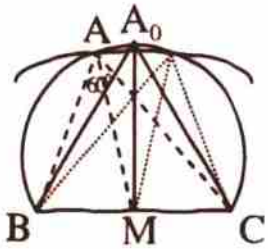
$\hat{A} = 45^0$, vì A nằm trên cung chứa góc 45^0 dựng trên đoạn BC.

AM = 5cm, vì A thuộc đường tròn (M, 5cm).

Vậy, ΔABC thoả mãn điều kiện đầu bài.

Biện luận: Để xác định xem bài toán có bao nhiêu nghiệm hình ta cần tính độ dài A_0M, trong đó A_0 là điểm chính giữa cung chứa góc 45^0.

Trong ΔA_0BM vuông tại M, ta có:



$$\overset{\frown}{BA_0M} = \frac{1}{2}\hat{A} = 22.5^0$$

$$\overset{\frown}{A_0BM} = 90^0 - \overset{\frown}{BA_0M} = 67.5^0$$

$$A_0M = BM.\tan\overset{\frown}{A_0BM} = 3.\tan 67.5^0 \approx 7.24 > AM$$

do đó, đường tròn (M, 5cm) cắt mỗi cung chứa góc tại hai điểm phân biệt.

Vậy, bài toán có hai nghiệm hình.

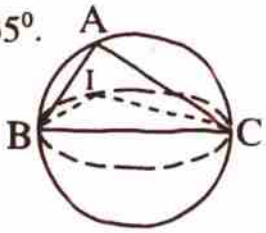
Bài 13.

a. Ta lần lượt thực hiện:

Phân tích: Giả sử đã dựng được ΔABC thoả mãn điều kiện đầu bài, ta thấy:

- Cạnh BC = 6cm dựng được ngay.
- Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, nên I là giao điểm các đường phân giác của ΔABC, do đó:

$$\overset{\frown}{BIC} = 180^0 - (\overset{\frown}{IBC} + \overset{\frown}{ICB}) = 180^0 - \frac{1}{2}(\overset{\frown}{ABC} + \overset{\frown}{ACB}) = 135^0.$$



Do BC cố định, $\overset{\frown}{BIC} = 135^0$ nên I di chuyển trên hai cung chứa góc 135^0 dựng trên BC.

Tức là, điểm I thoả mãn hai điều kiện:

- I nằm trên cung chứa góc 135^0 dựng trên đoạn thẳng BC.
- Vì bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1cm nên I nằm trên đường thẳng d song song và cách BC một khoảng bằng 1cm.

Vậy I là giao điểm của đường thẳng d với cung chứa góc 135^0.

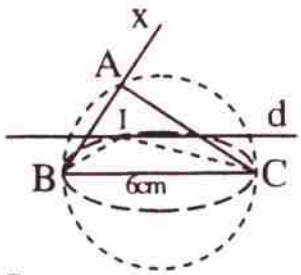
- Điểm A thoả mãn hai điều kiện:
  - A nằm trên đường tròn đường kính BC.
  - A nằm trên tia Bx sao cho BI là tia phân giác của góc $\overset{\frown}{xBC}$.

  Vậy A là giao điểm của (BC) với tia Bx.

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đoạn BC = 6cm.
- Dựng cung chứa góc 135^0 dựng trên đoạn thẳng BC.

- Dựng đường thẳng d song song và cách BC một khoảng bằng 1cm, đường thẳng d cắt cung chứa góc 135^0 tại I.
- Dựng đường tròn (BC).
- Dựng tia Bx sao cho BI là tia phân giác của góc $\widehat{xBC}$, khi đó Bx cắt (BC) tại A.
- Nối AB, AC ta được ΔABC phải dựng.



Chứng minh: Ta có ngay:

BC = 6cm theo cách dựng.

$\hat{A} = 90^0$, vì A nằm trên cung chứa góc 60^0 dựng trên đoạn BC.

Khoảng cách từ I đến BC bằng 1cm, vì I thuộc d.

Ta cần chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, tức là chứng minh CI là tia phân giác của góc C, thật vậy:

$$\widehat{ICB} = 180^0 - \widehat{BIC} - \widehat{CBI} = 180^0 - 135^0 - \widehat{CBI} = 45^0 - \widehat{CBI}.$$

$$\widehat{ICA} = \widehat{ACB} - \widehat{ICB} = (90^0 - \widehat{ABC}) - (45^0 - \widehat{CBI})$$

$$= (90^0 - 2\widehat{CBI}) - (45^0 - \widehat{CBI}) = 45^0 - \widehat{CBI} = \widehat{ICB}$$

$\Leftrightarrow$ CI là tia phân giác của góc C.

Vậy, ΔABC thoả mãn điều kiện đầu bài.

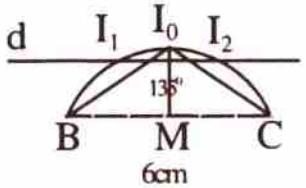
Biện luận: Để xác định xem bài toán có bao nhiêu nghiệm hình ta cần tính độ dài I_0M, trong đó I_0 là điểm chính giữa cung chứa góc 135^0 và M là trung điểm BC.

Trong ΔI_0BM vuông tại M, ta có:

$$\widehat{BI_0M} = \frac{1}{2}\widehat{BI_0C} = 67.5^0$$

$$\widehat{I_0BM} = 90^0 - \widehat{BI_0M} = 22.5^0$$

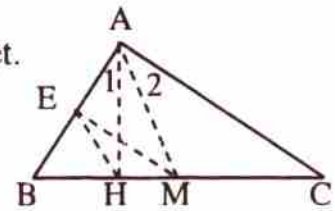
$$I_0M = BM.\tan\widehat{I_0BM} = 3.\tan 22.5^0 \approx 1.24 > 1$$



do đó, đường thẳng d cắt mỗi cung chứa góc tại hai điểm phân biệt.

Vậy, bài toán có hai nghiệm hình.

Bài 15.



a. Xét ΔABH vuông tại H, ta có:

$EH = \frac{1}{2}AB$, trung tuyến thuộc cạnh huyền $\Leftrightarrow EH = EA \Leftrightarrow \Delta EAH$ cân tại E.

b. Nhận xét rằng: $\widehat{AHE} = \hat{A}_1$, vì theo kết quả câu a) ta có ΔEAH cân tại E

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, giả thiết

$\hat{A}_2 = \widehat{AME}$, hai góc so le trong vì ME // AC do tính chất đường trung bình

suy ra $\widehat{AHE} = \widehat{AME}$. Vậy, các điểm M, H nằm phía đối với AE và thoả mãn $\widehat{AHE} = \widehat{AME}$ nên bốn điểm A, E, H, M thuộc cùng một đường tròn.

c. Từ kết quả câu b), ta suy ra: $\widehat{AEM} = \widehat{AHM} = 90^0$, góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AM}$

$\Rightarrow ME \perp AB.$ (1)

Mặt khác, ta cũng có ME // AC. (2)

Vậy từ (1) và (2) suy ra: $AB \perp AC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

CHỦ ĐỀ 7

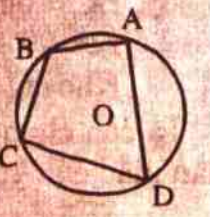
TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA TỨ GIÁC NỘI TIẾP

Định nghĩa: Nếu qua bốn đỉnh của một tứ giác (lồi) có một đường tròn thì tứ giác đó gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn, còn đường tròn đó gọi là đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

Ta có minh hoạ với tứ giác lồi ABCD như sau:



$A, B, C, D \in (O, R) \Leftrightarrow ABCD$ nội tiếp trong (O, R)

và khi đó, ta thấy ngay:

1. Theo định nghĩa đường tròn thì:

$$OA = OB = OC = OD = R$$

nhận xét đó sẽ gợi ý cho chúng ta một phương pháp chứng minh tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn (hoặc nói tứ giác ABCD nội tiếp được).

2. Với từng điều kiện:

$OA = OB \Leftrightarrow O$ thuộc đường trung trực của AB.

$OA = OD \Leftrightarrow O$ thuộc đường trung trực của AD.

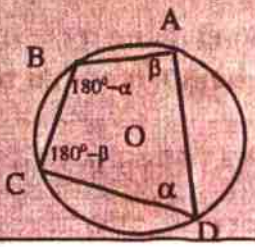
nhận xét đó sẽ gợi ý cho chúng ta phương pháp xác định tâm của một tứ giác nội tiếp được.

2. TÍNH CHẤT

Định lí

- ***Thuận:*** *Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện nhau bằng hai góc vuông.*
- ***Đảo:*** *Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện nhau bằng 2v thì tứ giác đó nội tiếp được trong một đường tròn.*

Ta có minh hoạ với tứ giác nối ABCD như sau:



$$ABCD \text{ nội tiếp} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\hat{A} + \hat{C} = 180^0 \\ \hat{B} + \hat{D} = 180^0\end{array}\right.$$

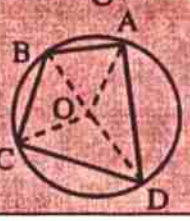
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp

Để chứng minh tứ giác nội tiếp đường tròn chúng ta có thể lựa chọn một các cách sau:

Cách 1: Chứng minh bốn đỉnh của tứ giác cùng cách đều một điểm.

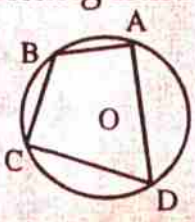


Tức là, nếu ta có:

$$OA = OB = OC = OD$$

thì tứ giác ABCD nội tiếp (O, OA).

Cách 2: Chứng minh tổng hai góc đối diện bằng hai góc vuông.



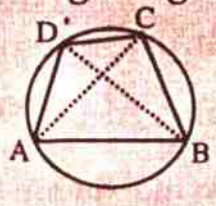
Tức là, nếu ta có:

$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^0$

hoặc $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^0$

thì tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn.

Cách 3: Dùng cung chứa góc α.



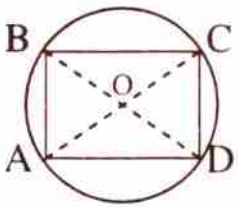
Tức là, nếu ta có:

$\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ và C, D cùng phía với AB

thì tứ giác ABCD nội tiếp.

☞ ***Chú ý:*** Trong các tứ giác đã học thì hình thang cân, hình chữ nhật, hình vuông bao giờ cũng nội tiếp được trong một đường tròn.

Ví dụ 1: *Chứng minh rằng hình chữ nhật* ABCD *nội tiếp được.*



✍ *Giải*

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD, ta có ngay:

OA = OC = OB = OB ⇔ ABCD nội tiếp trong (O, OA).

Ví dụ 2: (Bài 58/tr 90 – Sgk): *Cho* ΔABC *đều. Trên nửa mặt phẳng bờ* BC *không chứa đỉnh* A, *lấy điểm* D *sao cho* DB = DC *và* $\widehat{DCB} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$.

a. *Chứng minh* ABCD *là tứ giác nội tiếp.*

b. *Xác định tâm của đường tròn đi qua bốn điểm* A, B, C, D.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

a. ΔDBC cân đỉnh D nên $\widehat{DBC} = \widehat{DCB} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} = 30^0$.

Suy ra:

$\widehat{CDB} = 180^0 - (\widehat{DBC} + \widehat{DCB}) = 120^0$.

Tứ giác ABCD có tổng hai góc đối:

$\hat{A} + \hat{D} = 60^0 + 120^0 = 180^0$.

Vậy, tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn.

b. Do đường tròn ngoại tiếp ΔABC cũng đồng thời là đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD nên để xác định tâm đường tròn qua A, B, C, D chỉ cần tìm giao điểm O của AD với đường cao BB' của ΔABC.

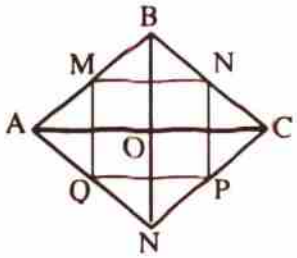
Đường tròn (O ; OA) đi qua A, B, C, D.

Ví dụ 3: *Cho hình thoi* ABCD *tâm* O, *cạnh bằng* a. *Gọi* M, N, P, Q *theo thứ tự là trung điểm của* AB, BC, CD, DA.

a. *Chứng minh rằng* AMNC *là một tứ giác nội tiếp.*

b. *Chứng minh rằng* MNPQ *là một tứ giác nội tiếp.*

Giải



a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Xét hai tam giác ΔAMC và ΔANC, ta có:

$$\text{AC chung};\quad \widehat{MAC} = \widehat{NCA};\quad AM = CN = \frac{a}{2}$$

Suy ra: $\Delta AMC = \Delta ANC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{ANC}$

Vậy, tứ giác AMNC nội tiếp được một đường tròn.

Cách 2: Ta có: MN // AC – vì MN là đường trung bình $AM = NC = \frac{a}{2}$

Suy ra AMNC là hình thang cân, do đó nó nội tiếp được một đường tròn.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Vì OM, ON, OP, OQ theo thứ tự là đường trung tuyến của các tam giác vuông ΔOAB, ΔOBC, ΔOCD, ΔODA nên:

$$OM = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2},\qquad ON = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2},$$

$$OP = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2},\qquad OQ = \frac{1}{2}DA = \frac{a}{2},$$

Suy ra: $OM = ON = OP = OQ = \frac{a}{2} \Leftrightarrow$ MNPQ nội tiếp đường tròn $(O, \frac{a}{2})$.

Cách 2: Vì MN, PQ theo thứ tự là đường trung bình của các tam giác ΔA⌐ ΔADC nên:

$$MN \overset{//}{=} \frac{1}{2}AC,\quad PQ \overset{//}{=} \frac{1}{2}AC \Rightarrow MN \overset{//}{=} PQ \Rightarrow \text{MNPQ là hình bình hành.}$$

Mặt khác:

$\widehat{MNP} = \widehat{BOC} = 90^0$ – vì là hai góc có cạnh tương ứng song song

Suy ra NMPQ là hình chữ nhật, do đó nó nội tiếp được một đường tròn.

Vấn đề 2: SỬ DỤNG TỨ GIÁC NỘI TIẾP GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

Phương pháp

Khi đã có được một tứ giác nội tiếp hoặc đã chứng minh được một tứ giác nội tiếp ta có thể suy ra:

- Các cặp góc đối bù nhau
- Các cặp góc nội tiếp cùng chắn một cung bằng nhau

....

Đó chính là lợi ích của tứ giác nội tiếp để thực hiện các yêu cầu khác của bài toán hình học.

Ví dụ 1: (Bài 54/tr 89 – Sgk): *Tứ giác* ABCD *có* $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^0$. *Chứng minh rằng các đường trung trực của* AC, BD, AB *cùng đi qua một điểm.*

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Tứ giác ABCD có tổng hai góc đối $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^0$ nên nó là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm O.

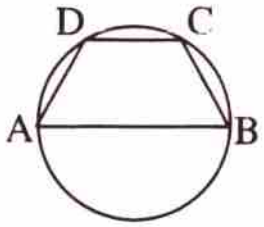
Đường tròn (O) cũng là đường tròn ngoại tiếp ΔABC nên O là giao điểm các đường trung trực của AB và AC.

Tương tự, (O) là đường tròn ngoại tiếp ΔBCD nên O nằm trên đường trung trực của BD.

Vậy các trung trực của AB, BD, AC cùng đi qua điểm O.

Ví dụ 2: *Tìm điều kiện để hình thang* ABCD (AB // CD) *nội tiếp được.*

✍ *Giải*



Vì ABCD là hình thang, nên ta có $\hat{A} + \hat{D} = 180^0$. (1)

Để ABCD nội tiếp được, điều kiện là $\hat{B} + \hat{D} = 180^0$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$\hat{A} = \hat{B} \Leftrightarrow$ ABCD là hình thang cân.

Ví dụ 3: (Bài 55/tr 89 – Sgk): *Cho* ABCD *là một tứ giác nội tiếp đường tròn tâm* M, *biết* $\widehat{DAB} = 80^0$, $\widehat{DAM} = 30^0$, $\widehat{BMC} = 70^0$. *Hãy tính số đo các góc* $\widehat{MAB}, \widehat{BCM}, \widehat{AMB}, \widehat{DMC}, \widehat{AMD}, \widehat{MCD}, \widehat{BCD}$.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Ta có:

$\widehat{MAB} = \widehat{DAB} - \widehat{DAM} = 80^0 - 30^0 = 50^0$.

$\widehat{BCD} = 180^0 - \widehat{DAB} = 180^0 - 80^0 = 100^0$.

Kẻ đường kính CC', ta có:

$$\widehat{BCM} = \widehat{BCC'} = \frac{1}{2}[\text{sđ}\,\widehat{CC'} - \text{sđ}\,\widehat{BC}] = \frac{1}{2}[180^0 - 70^0] = 55^0.$$

Suy ra:

$\widehat{MCD} = \widehat{BCD} - \widehat{BCM} = 100^0 - 55^0 = 45^0$.

$\widehat{AMD} = 180^0 - (\widehat{DAM} + \widehat{ADM}) = 180^0 - (30^0 + 30^0) = 120^0$.

$\widehat{AMC} = \text{sđ}\,\widehat{CD} = \text{sđ}\,\widehat{CB} - \text{sđ}\,\widehat{BC} = 160^0 - 70^0 = 90^0$.

$\widehat{AMB} = 360^0 - (\widehat{BMC} + \widehat{CMD} + \widehat{DMA}) = 360^0 - (70^0 + 90^0 + 120^0) = 80^0$.

Ví dụ 4: *Cho nửa đường tròn đường kính* AB *và một dây* CD. *Qua* C *vẽ đường thẳng vuông góc với* CD, *cắt* AB *tại* I. *Các tiếp tuyến tại* A *và* B *của nửa đường tròn cắt đường thẳng* CD *theo thứ tự tại* E *và* F. *Chứng minh rằng:*

a. *Các tứ giác* AECI *và* BFCI *nội tiếp được.*

b. ΔIEF ~ ΔCAB, *từ đó suy ra* ΔIEF *vuông.*

Giải

a. Theo tính chất của tiếp tuyến ta có AE ⊥ AB, BF ⊥ AB.

- Tứ giác AECI có:

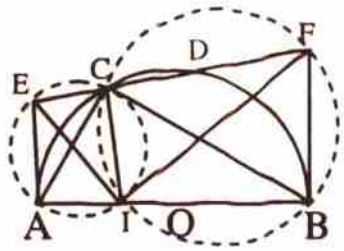
$$\widehat{EAI} + \widehat{ECI} = 90^0 + 90^0 = 180^0$$

Suy ra tứ giác AECI nội tiếp đường tròn (O_1).

- Tứ giác BFCI có:

$$\widehat{IBF} + \widehat{ICF} = 90^0 + 90^0 = 180^0.$$

Suy ra tứ giác BFCI nội tiếp đường tròn (O_2).



b. Xét hai tam giác ΔIEF và ΔCAB, ta có:

$\widehat{IEF} = \widehat{CAB}$ – vì hai góc nội tiếp cùng chắn cung CI của đường tròn (O_1).

$\widehat{IFE} = \widehat{CBA}$ – vì hai góc nội tiếp cùng chắn cung CI của đường tròn (O_2).

Vậy ΔIEF ~ ΔCAB suy ra $\widehat{EIF} = \widehat{ACB}$.

Mặt khác: $\widehat{ACB} = 90^0$ – vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB nên $\widehat{EIF} = 90^0$, suy ra ΔIEF vuông.

☞ ***Nhận xét***: Khi đã chứng minh được một tứ giác nội tiếp ta có thể vẽ đường tròn đi qua bốn đỉnh của nó, để dễ nhận ra các góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

Ví dụ 5: *Cho* ΔABC, *các đường phân giác của các góc trong* $\hat{B}$ và $\hat{C}$ *và gặp nhau tại* S, *các đường phân giác của các góc ngoài* $\hat{B}$ và $\hat{C}$ *gặp nhau tại* E. *Chứng minh rằng*:

a. BSCE *là tứ giác nội tiếp.*

b. *Ba điểm* A, S, E *thẳng hàng.*

c. *Trung điểm* M *của* SE *thuộc đường tròn ngoại tiếp* ΔABC.

Giải

a. Ta có:

- Vì BS, BE là các tia phân giác của hai góc kề bù nên BS ⊥ BE.
- Vì CS, CE là các tia phân giác của hai góc kề bù nên CS ⊥ CE.

Suy ra: $\widehat{SBE} + \widehat{SCE} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ do đó tứ giác BSCE là tứ giác nội tiếp (cụ thể nó nội tiếp đường tròn đường kính SE).

b. Vì AS và AE đều là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên A, S, E thẳng hàng.

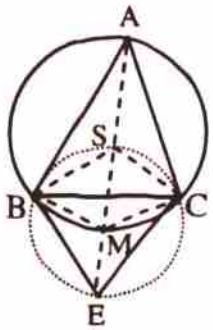
c. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Vì M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BSCE nên:

$$\widehat{SCB} = \frac{1}{2}\widehat{SMB}.$$

Mặt khác:

$$\widehat{SCB} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{SMB} = \widehat{ACB} \qquad (1)$$



Tương tự, ta cũng có $\overset{\frown}{SMC} = \overset{\frown}{ABC}$. (2)

Từ (1) và (2), ta được : $\overset{\frown}{BMC} = \overset{\frown}{SMB} + \overset{\frown}{SMC} = \overset{\frown}{ACB} + \overset{\frown}{ABC}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{BMC} + \overset{\frown}{BAC} = \overset{\frown}{ACB} + \overset{\frown}{ABC} + \overset{\frown}{BAC} = 180^0$

Do đó tứ giác ABMC nội tiếp.

Vậy, điểm M thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Cách 2: Chứng minh tương tự như trong cách 1 ta được:

$\overset{\frown}{SMB} = \overset{\frown}{ACB} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AMB} = \overset{\frown}{ACB}$

Suy ra, M và C thuộc cùng một cung chứa góc vẽ về một phía của AB.

Vậy, M thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

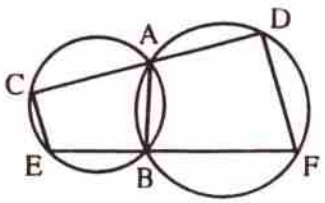
☞ ***Nhận xét***: Để chứng minh ABMC là tứ giác nội tiếp (câu b) trong cách 1 ta sử dụng định lí đảo " *Nếu một tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0 thì tứ giác đó nội tiếp được một đường tròn* ", trong cách 2 ta sử dụng cung chứa góc "*Nếu các điểm C, M nằm cùng phía đối với AB và* $\overset{\frown}{AMB} = \overset{\frown}{ACB}$ *thì C, M, A, B thuộc cùng một đường tròn*".

Ví dụ 6: *Cho hai đường tròn* (O) *và* (O') *cắt nhau tại* A *và* B. *Vẽ một đường thẳng qua* A *cắt đường tròn* (O) *tại* C *và cắt đường tròn* (O') *tại* D. *Vẽ một đường thẳng qua* B *cắt đường tròn* (O) *tại* E *và đường tròn* (O') *tại* F. *Hai đường thẳng* CD *và* EF *không cắt nhau ở bên trong hai đường tròn. Chứng minh rằng* CE // DF.

✍ *Giải*

Vẽ cây chung AB, ta có:

$\overset{\frown}{DAB} + \overset{\frown}{CAB} = 180^0$.



Tứ giác ABEC là tứ giác nội tiếp nên:

$\overset{\frown}{CEB} + \overset{\frown}{CAB} = 180^0 \Rightarrow \overset{\frown}{CEB} = \overset{\frown}{DAB}$

Tứ giác ABFD là tứ giác nội tiếp nên:

$\overset{\frown}{DAB} + \overset{\frown}{DFB} = 180^0 \Rightarrow \overset{\frown}{CEB} + \overset{\frown}{DFB} = 180^0 \Rightarrow$ CE // DF.

☞ ***Nhận xét***: Trong ví dụ này, ta đã chứng minh $\overset{\frown}{CEB} = \overset{\frown}{DAB}$.

Một cách tổng quát " *Mỗi góc của tứ giác nội tiếp bằng góc ngoài của góc đối diện với nó* ".

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp được, biết:

a. ABCD là hình thang cân.

b. ABCD là hình chữ nhật.

Bài 2. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và tia tiếp tuyến Bx của nửa đường tròn. Trên tia Bx lấy hai điểm C và D (C nằm giữa B và D). Các tia AC và AD lần lượt cắt đường tròn tại E và F. Hai dây AE và BF cắt nhau tại M. Hai tia AF và BE cắt nhau tại N. Chứng minh rằng:

a. MN // Bx.
b. Tứ giác CDFE nội tiếp được.

Bài 3. Cho ΔABC, các đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Gọi D là điểm đối xứng của H qua trung điểm M của BC.

a. Chứng minh tứ giác ABDC nội tiếp được trong một đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn đó.
b. Đường thẳng DH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I. Chứng minh rằng 5 điểm A, I, F, H E cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Tia OA cắt đường tròn (O') tại C, tia O'A cắt đường tròn (O) tại D. Chứng minh rằng:

a. Tứ giác OO'CD nội tiếp.
b. Tứ giác OBO'C nội tiếp.
c. Năm điểm O, O', B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 5. Cho tứ giác ABCD nội tiếp nửa đường tròn đường kính AD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Vẽ EF ⊥ AD. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng:

a. Các tứ giác ABEF, DCEF nội tiếp được.
b. Tia CA là tia phân giác của góc $\widehat{BCF}$.
c. Tứ giác BCMF nội tiếp được.

Bài 6. Chứng minh, rằng trong một đường tròn hai dây không đi qua tâm không thể cắt nhau tại trung điểm của mỗi dây.

Bài 7. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Trên đường tròn (O') lấy một điểm M. Các đường thẳng MA, MB cắt đường tròn (O) tại C và D. Từ M vẽ tiếp tuyến xy với đường tròn (O'). Chứng minh rằng xy // CD.

Bài 8. Hai đường tròn O và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt tại C và D. Vẽ dây CE của đường tròn (O) và dây DF của đường tròn (O') song song với nhau. Chứng minh rằng ba điểm B, E, F thẳng hàng.

Bài 9. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB lấy một điểm M. Đường thẳng qua C vuông góc với CM cắt các tia AB, AD lần lượt tại E và F. Tia CM cắt đường thẳng AD tại N. Chứng minh rằng:

a. Tứ giác AMCF nội tiếp được.
b. Tứ giác ANEC nội tiếp được.
c. CM + CN = EF.

Bài 10. Cho Hình bình hành ABCD. Đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C cắt đường thẳng CD tại P khác C. Chứng minh AP = AD.

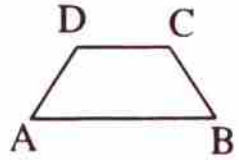
Bài 11. Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn (O) ta vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn. Trên cung nhỏ AB lấy một điểm C. Vẽ CD ⊥ AB, CE ⊥ MA, CF ⊥ MB. Goi I là giao điểm của AC và DE, K là giao điểm của BC và DF. Chứng minh rằng:

a. Tứ giác AECD nội tiếp được.
b. Tứ giác BFCD nội tiếp được.
c. $CD^2 = CE \cdot CF$.
d. IK // AB.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1.

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:



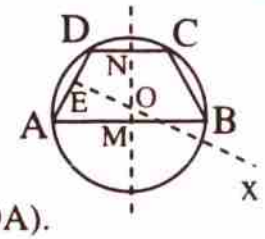
Cách 1: Vì ABCD là hình thang cân, nên ta có:

$\overset{\frown}{BAD} + \overset{\frown}{BCD} = \overset{\frown}{BAD} + \overset{\frown}{CDA}$

$= 180^0$, tổng hai góc trong cùng phía

Vậy, hình thang cân ABCD nội tiếp được.

Cách 2: Gọi E, M, N theo thứ tự là trung điểm của AD, AB, CD. Dựng đường trung trực Ex của AD cắt MN tại O, ta có:



OA = OB, vì O thuộc MN là trung trực của AB

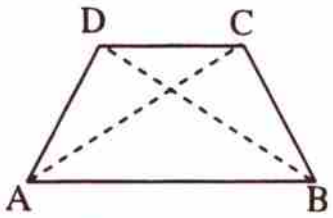
OC = OD, vì O thuộc MN là trung trực của CD

OA = OD, vì O thuộc Ex là trung trực của AD

Suy ra OA = OB = OC = OD.

Vậy, hình thang cân ABCD nội tiếp được trong đường tròn (O, OA).

Cách 3: Xét hai tam giác ΔABD và ΔBAC, ta có:



AB chung

$\overset{\frown}{BAD} = \overset{\frown}{ABC}$, vì ABCD là hình thang cân

AD = BC, vì ABCD là hình thang cân

Do đó: ΔABD = ΔBAC (c.g.c) $\Rightarrow \overset{\frown}{ADB} = \overset{\frown}{ACB}$.

Vậy, các điểm C, D nằm phía đối với AB và thoả mãn $\overset{\frown}{ADB} = \overset{\frown}{ACB}$ nên bốn điểm A, B, C, D thuộc cùng một đường tròn.

Cách 4: Xét hai tam giác ΔACD và ΔBDC, ta có:

CD chung

$\overset{\frown}{ADC} = \overset{\frown}{BCD}$, vì ABCD là hình thang cân

AD = BC, vì ABCD là hình thang cân

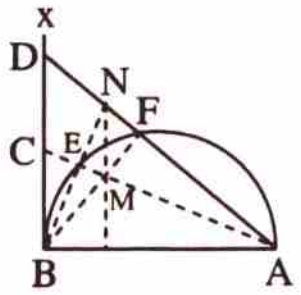
do đó: ΔACD = ΔBDC (c.g.c) $\Rightarrow \overset{\frown}{CAD} = \overset{\frown}{CBD}$.

Vậy, các điểm A, B nằm phía đối với CD và thoả mãn $\overset{\frown}{CAD} = \overset{\frown}{CBD}$ nên bốn điểm A, B, C, D thuộc cùng một đường tròn.

b. *Học sinh tự làm.*

Bài 2.

a. Trong ΔABN, ta có:



$\overset{\frown}{AEB} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Leftrightarrow$ AE ⊥ BN. (1)

$\overset{\frown}{AFB} = 90^0$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\Leftrightarrow$ BF ⊥ AN. (2)

Từ (1) và (2), suy ra M là trực tâm ΔABN, suy ra:

MN ⊥ AB $\Rightarrow$ MN // Bx, đpcm.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Nhận xét rằng:

$\overset{\frown}{CDE} = \overset{\frown}{ABF}$, góc có cạnh tương ứng vuông góc

$\overset{\frown}{ABF} = \overset{\frown}{AEF}$, góc nội tiếp cùng chắn một cung

Khi đó, trong tứ giác CDFE, ta nhận thấy:

$\widehat{CEF} + \widehat{CDF} = \widehat{CEF} + \widehat{AEF}, = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác CDFE nội tiếp được.

Cách 2: Nhận xét rằng: $90^0 = \widehat{DFE} + \widehat{BFE} = \widehat{DFE} + \widehat{BAE}$,

$\widehat{BCA} + \widehat{BAC} = \widehat{BCA} + \widehat{BAE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{DFE} = \widehat{BCA}$.

Khi đó, trong tứ giác CDFE, ta nhận thấy:

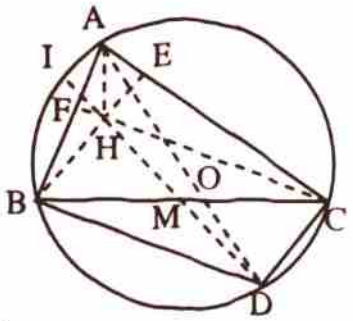
$\widehat{DCE} + \widehat{DFE} = \widehat{DCE} + \widehat{BCA} = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác CDFE nội tiếp được.

Bài 3.

a. Nhận xét rằng, tứ giác CDBH có hai đường chéo CB và DH cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên nó là hình bình hành, suy ra:

CD // BH và vì $BH \perp AC \Rightarrow CD \perp AC \Leftrightarrow \widehat{ACD} = 90^0$.

BD // CH và vì $CH \perp AB \Rightarrow BD \perp AB \Leftrightarrow \widehat{ABD} = 90^0$.



Vậy, tứ giác ABDC nội tiếp đường tròn đường kính AD. Do đó, tâm O là trung điểm của AD.

b. Nhận xét rằng:

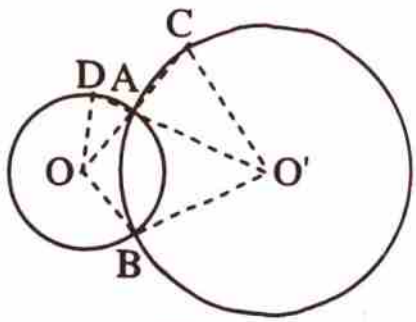
$\widehat{AEH} = 90^0$, vì BE là đường cao

$\widehat{AFH} = 90^0$, vì CF là đường cao

$\widehat{AIH} = \widehat{AID} = 90^0$, vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.

Vậy, các điểm E, F, I cùng nhìn AH dưới một góc vuông, do đó 5 điểm A, I, F, H, E cùng nằm trên một đường tròn đường kính AH.

Bài 4.



a. Nhận xét rằng:

$\widehat{ODO'} = \widehat{OAD}$, vì ΔOAD cân tại O

$\widehat{OAD} = \widehat{CAO'}$, vì đối đỉnh

$\widehat{CAO'} = \widehat{OCO'}$, vì $\Delta O'AC$ cân tại O'

Từ đó, suy ra: $\widehat{ODO'} = \widehat{OCO'}$.

Vậy, các điểm C, D nằm phía đối với OO' và thoả mãn $\widehat{ODO'} = \widehat{OCO'}$ nên bốn điểm O, O', C, D thuộc cùng một đường tròn, tức là tứ giác OO'CD nội tiếp.

b. Xét hai tam giác $\Delta AOO'$ và $\Delta BOO'$, ta có:

OO' chung

OA = OB, vì cùng bằng bán kính đường tròn (O)

O'A = O'B, vì cùng bằng bán kính đường tròn (O')

Do đó: $\Delta AOO' = \Delta BOO'$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{OAO'} = \widehat{OBO'}$.

Khi đó, ta được: $\widehat{OBO'} + \widehat{OCO'} = \widehat{OAO'} + \widehat{CAO'} = 180^0$ tức là, tứ giác OBO'C nội tiếp.

c. Nhận thấy rằng:

- Từ kết quả câu a) suy ra D thuộc đường tròn ngoại tiếp $\Delta COO'$.
- Từ kết quả câu b) suy ra B thuộc đường tròn ngoại tiếp $\Delta COO'$.

Vậy, năm điểm O, O', B, C, D cùng nằm trên một đường tròn ngoại tiếp $\Delta COO'$.

Bài 5. *(Học sinh tự vẽ hình)* Hướng dẫn:

a. Nhận xét rằng:

Tứ giác ABEF nội tiếp được là do $\widehat{ABE} = \widehat{AFE} = 90^0$
(nó nội tiếp đường tròn đường kính AE)

Tứ giác DCEF nội tiếp được là do $\widehat{DCE} = \widehat{DFE} = 90^0$
(nó nội tiếp đường tròn đường kính DE)

b. Trong đường tròn (AD), ta có:

$\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$, góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AB}$. (1)

Trong đường tròn (DE), ta có:

$\widehat{ADB} = \widehat{ACF}$, góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{EF}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{ACB} = \widehat{ACF} \Leftrightarrow$ CA là tia phân giác của góc $\widehat{BCF}$.

Bài 6. Ta đi chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử trái lại có hai dây cung AC và BD cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường và không đi qua tâm O.

Khi đó tứ giác ABCD là hình bình hành $\Rightarrow$ ABCD là hình chữ nhật

$\Rightarrow \widehat{BAD} = 90^0 \Rightarrow$ BD là đường kính $\Rightarrow O \in BD$, mâu thuẫn.

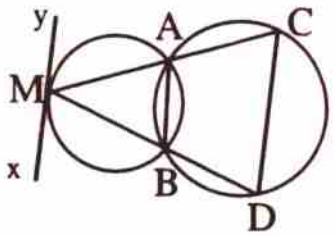
Bài 7. Vẽ dây cung AB, ta có: $\widehat{MAB} + \widehat{CAB} = 180^0$.

Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp nên:

$\widehat{CDB} + \widehat{CAB} = 180^0 \Rightarrow \widehat{CDB} = \widehat{MAB}$

Mặt khác trong đường tròn (O'), ta có:

$\widehat{MAB} = \widehat{xMB} \Rightarrow \widehat{CDB} = \widehat{xMB} \Rightarrow$ CD // xy, đpcm.



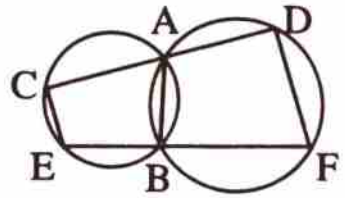
Bài 8. Vẽ dây chung AB, ta lần lượt thấy:

- Vì CE // DF nên: $\widehat{ACE} + \widehat{ADF} = 180^0$.
- Tứ giác ABEC là tứ giác nội tiếp nên:

$\widehat{ABE} + \widehat{ACE} = 180^0$. (1)

- Tứ giác ABFD là tứ giác nội tiếp nên:

$\widehat{ABF} + \widehat{ADF} = 180^0$. (2)



Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

$\widehat{ABE} + \widehat{ACE} + \widehat{ABF} + \widehat{ADF} = 360^0 \Leftrightarrow \widehat{EBF} + (\widehat{ACE} + \widehat{ADF}) = 360^0$

$\Rightarrow \widehat{EBF} = 180^0 \Leftrightarrow$ ba điểm B, E, F thẳng hàng.

Bài 9.

a. Ta lần lượt thấy:

$\widehat{MAF} = 90^0$, vì ABCD là hình vuông

$\widehat{MCF} = 90^0$, theo giả thiết EF $\perp$ CM

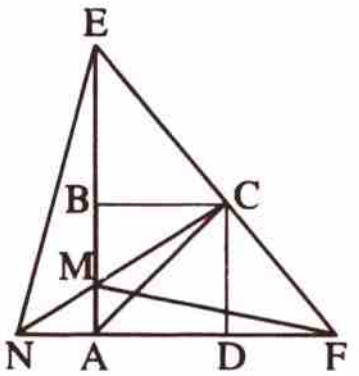
Do đó, tứ giác AMCF nội tiếp đường tròn đường kính MF.

b. Ta lần lượt thấy:

$\widehat{NAE} = 90^0$, vì ABCD là hình vuông

$\widehat{NCE} = 90^0$, theo giả thiết EF $\perp$ CM

Do đó, tứ giác ANEC nội tiếp đường tròn đường kính NE.



c. Ta lần lượt xét:

- Xét ΔCMF vuông tại C, ta có:

$\overset{\frown}{CMF} = \overset{\frown}{CAF} = 45^0$, cùng chắn cung $\overset{\frown}{CF}$ của (MF)

$\Rightarrow \Delta CMF$ vuông cân tại $C \Rightarrow CM = CF$. (1)

- Xét ΔCNE vuông tại C, ta có:

$\overset{\frown}{CNE} = \overset{\frown}{CAE} = 45^0$, cùng chắn cung $\overset{\frown}{CE}$ của (NE)

$\Rightarrow \Delta CNE$ vuông cân tại $C \Rightarrow CN = CE$. (2)

Cộng theo vế (1) và (2), ta được: $CM + CN = CF + CE = EF$, đpcm.

Bài 10. *Bạn đọc tự vẽ hình*

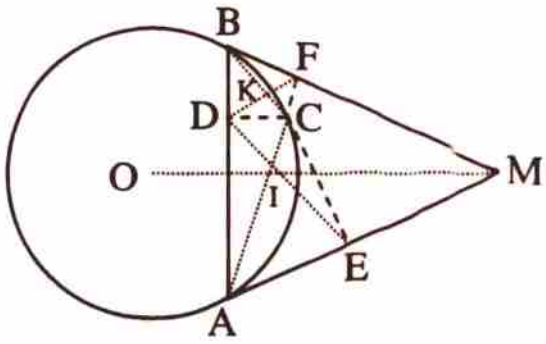
Ta có: $\hat{B} + \overset{\frown}{APC} = 180^0$ (ABCP là tứ giác nội tiếp).

$\hat{D} + \overset{\frown}{APC} = 180^0$ ($\hat{D} = \hat{B}$, tính chất hình bình hành).

$\overset{\frown}{APD} + \overset{\frown}{APC} = 180^0$ (hai góc kề bù).

Suy ra: $\hat{D} = \overset{\frown}{APD} \Rightarrow \Delta APD$ cân tại $A \Rightarrow AP = AD$.

Bài 11.



a. Xét tứ giác AECD, ta có:

$\overset{\frown}{ADC} + \overset{\frown}{AEC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Do đó, tứ giác AECD nội tiếp được.

Xét tứ giác BFCD, ta có:

$\overset{\frown}{BDC} + \overset{\frown}{BFC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Do đó, tứ giác BFCD nội tiếp được.

b. Xét hai tam giác ΔCDE và ΔCFD, ta có:

$\overset{\frown}{CED} = \overset{\frown}{CAD}$, góc nội tiếp cùng chắn một cung trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác AECD

$\overset{\frown}{CAD} = \overset{\frown}{CBF}$, góc nội tiếp cùng chắn một cung và góc tạo bởi tiếp tuyến với dây cung đó

$\overset{\frown}{CBF} = \overset{\frown}{CDF}$, góc nội tiếp cùng chắn một cung trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác BFCD

$\Rightarrow \overset{\frown}{CED} = \overset{\frown}{CDF}$. (1)

$\overset{\frown}{CDE} = \overset{\frown}{CAE}$, góc nội tiếp cùng chắn một cung trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác AECD

$\overset{\frown}{CAE} = \overset{\frown}{CBD}$, góc nội tiếp cùng chắn một cung và góc tạo bởi tiếp tuyến với dây cung đó

$\overset{\frown}{CBD} = \overset{\frown}{CFD}$, góc nội tiếp cùng chắn một cung trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác BFCD

$\Rightarrow \overset{\frown}{CDE} = \overset{\frown}{CFD}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\Delta CDE \sim \Delta CFD \Rightarrow \dfrac{CD}{CF} = \dfrac{CE}{CD} \Leftrightarrow CD^2 = CE \cdot CF$, đpcm.

c. *Học sinh tự làm.*

CHỦ ĐỀ 8

ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP – ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP ĐA GIÁC ĐỀU

Định nghĩa 1: *Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác đó và khi đó đa giác được gọi là nội tiếp đường tròn.*

Định nghĩa 2: *Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là đường tròn nội tiếp đa giác đó và khi đó đa giác được gọi là ngoại tiếp đường tròn.*

Định lí : Bất kì đa giác đều nào cũng có một đường tròn ngoại tiếp và một đường tròn nội tiếp.

Ta có:

- Tâm chung của đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp một đa giác đều gọi là *tâm của đa giác đều* đó.
- Khoảng cách từ tâm của đa giác đều đến cạnh của nó gọi là *trung đoạn* (cũng là bán kính của đường tròn nội tiếp).

2. BÁN KÍNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP ĐA GIÁC ĐỀU

Gọi R, r, n và a lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp, số cạnh và độ dài mỗi cạnh.

Xét ΔOHA, ta có:

$$\widehat{AOB} = \frac{180^0}{n} \Rightarrow \widehat{AOH} = \frac{180^0}{2n}.$$

$$R = OA = \frac{AH}{\sin\widehat{AOH}} = \frac{a}{2\sin\dfrac{180^0}{n}} \Rightarrow \sin\frac{180^0}{n} = \frac{a}{2R}.$$

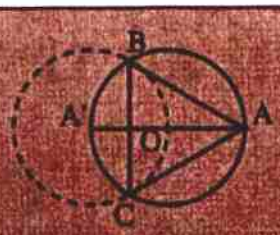
$$r = OH = \frac{AH}{\tan\widehat{AOH}} = \frac{a}{2\tan\dfrac{180^0}{n}} \Rightarrow \tan\frac{180^0}{n} = \frac{a}{2r}.$$

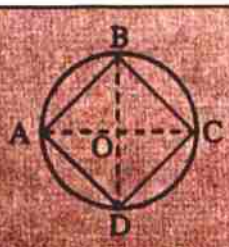
Định lí : Với mọi đa giác đều có cùng số cạnh, tỉ số giữa chu vi đa giác với đường kính của đường tròn ngoại tiếp không phụ thuộc độ dài của đường kính.

3. CÁCH VẼ CÁC ĐA GIÁC ĐỀU THÔNG DỤNG BẰNG THƯỚC VÀ COMPA

a. Để vẽ ΔABC đều, nội tiếp đường tròn (O), ta thực hiện:

- Vẽ đường kính AA'.
- Vẽ đường tròn (A', A'O), cắt (O) ở B và C.

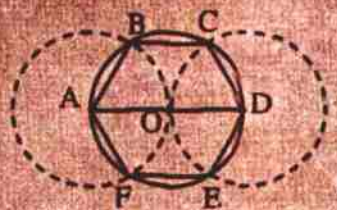




b. Để vẽ hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O), ta vẽ hai đường kính vuông góc là AC và BD.

c. Để vẽ lục giác đều ABCDEF nội tiếp đường tròn (O), ta thực hiện:

- Vẽ đường kính AD.
- Vẽ đường tròn (A; AO), cắt (O) ở B và F.
- Vẽ đường tròn (D; DO), cắt (O) ở C và E.



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: (Bài 61/tr 91 – Sgk):

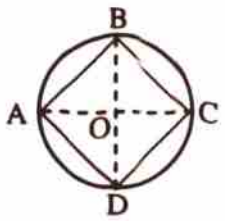
a. *Vẽ đường tròn tâm* O, *bán kính* 2cm.

b. *Vẽ hình vuông nội tiếp đường tròn* (O) *đó.*

c. *Tính bán kính* r *của đường tròn nội tiếp hình vuông ở câu* b) *rồi vẽ đường tròn* (O ; r).

Giải

a. Cách vẽ: Mở compa một khoảng bằng 2 cm. Quay một vòng để vẽ đường tròn (O ; 2).



b. Cách vẽ:

- Từ điểm A bất kì trên đường tròn, vẽ đường kính AC.
- Vẽ đường kính BD vuông góc với đường kính AC.
- A, B, C, D là bốn đỉnh của hình vuông cần dựng.

c. Đường tròn nội tiếp hình vuông có đường kính bằng cạnh của hình vuông ABCD.

Ta có:

$$OE^2 + EA^2 = OA^2 \Leftrightarrow 2r^2 = 2^2 \Rightarrow r = \sqrt{2}.$$

Cách vẽ đường tròn nội tiếp hình vuông: Kẻ OE⊥AB. vẽ đường tròn (O;OE).

Ví dụ 2: (Bài 62/tr 91 – Sgk):

a. *Vẽ* ΔABC *đều cạnh* a = 3cm.

b. *Vẽ đường tròn* (O ; R) *ngoại tiếp* ΔABC. *Tính* R.

c. *Vẽ đường tròn* (O ; r) *nội tiếp* ΔABC. *Tính* r.

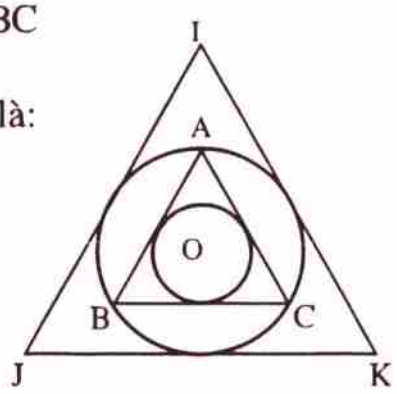
d. *Vẽ tam giác đều* IJK *ngoại tiếp đường tròn* (O ; R).

Giải

a. Cách vẽ:

- Vẽ BC = 3cm.
- Vẽ các đường tròn (B ; 3cm) và (C ; 3cm) cắt nhau tại A.
- ΔABC là tam giác đều có cạnh bằng 3cm.

b. Tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC trùng với trọng tâm của tam giác đó.



Ta có bán kính R của đường tròn ngoại tiếp ΔABC là:

$$R = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}AB\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}.3.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\text{ cm}.$$

c. Bán hính r của đường tròn nội tiếp ΔABC là:

$$r = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3}AB\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}.$$

d. Vẽ các đường tròn (A ; AB), (B ; AB) và (C ; AB).

Các đường tròn này cắt nhau tại I, J, K thì ΔIJK là tam giác ngoại tiếp đường tròn (O ; R).

Ví dụ 3: *Một đường tròn có bán kính* R.

a. *Tính diện tích tam giác đều nội tiếp đường tròn đó theo* R.

b. *Tính diện tích hình vuông nội tiếp đường tròn đó theo* R.

c. *Tính diện tích lục giác đều nội tiếp đường tròn đó theo* R.

Giải

a. Gọi a là độ dài cạnh tam giác đều, ta có:

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^0}{3}} \Rightarrow a = 2R\sin 60^0 = R\sqrt{3}.$$

Khi đó diện tích tam giác được cho bởi:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}.$$

b. Gọi a là độ dài cạnh hình vuông, ta có:

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^0}{4}} \Rightarrow a = 2R.\sin 45^0 = R\sqrt{2}.$$

Khi đó diện tích hình vuông được cho bởi:

$$S = a^2 = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2.$$

c. Diện tích lục giác đều gồm 6 tam giác đều có cạnh bằng R, do đó:

$$S = 6.\frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính diện tích của một đa giác đều bất kì chúng ta chỉ cần xác định được độ dài của cạnh đa giác đều đó và đối với các đa giác đều chúng ta đã có được công thức liên hệ giữa cạnh với bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp.

Ví dụ 4: (Bài 63/tr 92 – Sgk): *Cho đường tròn* (O, R). *tính theo* R:

a. *Cạnh của tam giác đều nội tiếp.*
b. *Cạnh của hình vuông nội tiếp.*
c. *Cạnh của lục giác đều nội tiếp.*

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$a = 2R.\sin\frac{180^0}{3} = 2R.\sin 60^0 = R\sqrt{3}.$$

b. Ta có:

$$a = 2R.\sin\frac{180^0}{4} = 2R.\sin 45^0 = R\sqrt{2}.$$

c. Ta có:

$$a = 2R.\sin\frac{180^0}{6} = 2R.\sin 30^0 = R.$$

Ví dụ 5: *Cho lục giác đều* ABCDEF *tâm* O.

a. *Gọi* a *là độ dài cạnh lục giác đều. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp* R *và bán kính đường tròn nội tiếp* r *của lục giác.*
b. *Gọi* M *là một điểm bất kì trong* ΔAOB. *Gọi* H, I, K *theo thứ tự là hình chiếu của* M *trên* OA, OB, CF. *Chứng minh rằng năm điểm* M, H, I, O, K *cùng thuộc một đường tròn.*
c. *Chứng minh rằng* ΔHIK *là tam giác đều.*

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^0}{6}} = \frac{a}{2\sin 30^0} = a.$$

$$r = \frac{a}{2\tan\frac{180^0}{6}} = \frac{a}{2\tan 30^0} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

b. Nhận xét rằng:

$\widehat{OHM} = \widehat{OIM} = \widehat{OKM} = 90^0$

⇒ H, I, K thuộc đường tròn có đường kính OM

⇒ H, I, K, O, M cùng thuộc một đường tròn.

c. Giả sử K thuộc đoạn thẳng OF.

Xét đường tròn đi qua năm điểm H, I, K, O, M, ta có:

$\widehat{HKI} = \widehat{HOI} = 60^0$ – vì góc nội tiếp cùng chắn một cung.

Trong ΔHIK ta có: $\widehat{HIK} = \widehat{HOK} = 60^0$ nên ΔHIK là tam giác đều.

☞ ***Nhận xét***:

1. Trong lời giải ở câu a), ta tính được R, r dựa trên công thức đã biết, tuy nhiên cũng có thể sử dụng việc xét tam giác vuông để xác định R, r.
2. Nhờ chứng minh được năm điểm M, H, I, O, K cùng thuộc một đường tròn, các góc $\widehat{HKI}$ và $\widehat{HOI}$ là hai góc nội tiếp của đường tròn đó, do đó áp dụng tính chất của góc nội tiếp, ta tính được:

$\widehat{HIK} = 60^0$ và $\widehat{IKH} = 60^0$.

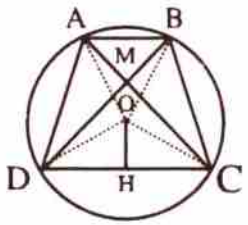
Ví dụ 6: (Bài 64/tr 92 – Sgk): *Trên một đường tròn bán kính* R, *ta lần lượt đặt theo cùng một chiều, kể từ một điểm* A, *một cung* $\widehat{AB} = 60^0$ *rồi một cung* $\widehat{BC} = 90^0$ *và một cung* $\widehat{CD} = 120^0$.

a. *Tứ giác* ABCD *là hình gì ?*

b. *Chứng minh rằng hai đường chéo của nó vuông góc với nhau.*

c. *Tính các cạnh và đường chéo của tứ giác* ABCD *theo* R.

✍ *Giải*



a. Ta có:

$\widehat{BDC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BC} = 45^0$

$\text{sđ}\widehat{AD} = 360^0 - (60^0 + 90^0 + 120^0) = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AD} = 45^0 = \widehat{BDC} \Rightarrow$ AB // CD, vì so le trong

Do đó, ABCD là hình thang và hình thang nội tiếp đường tròn nên nó là hình thang cân.

b. Gọi M la giao điểm của AC và BD, vì góc $\widehat{AMD}$ là vì góc có đỉnh ở bên trong đường tròn nên: $\widehat{AMD} = \frac{\text{sđ}\widehat{AD} + \text{sđ}\widehat{BC}}{2} = \frac{90^0 + 90^0}{2} = 90^0 \Rightarrow AC \perp BD.$

c. Ta lần lượt có nhận xét:

- ΔOAB đều nên $AB = OA = R$.
- ΔOAD vuông cân nên: $AD = OA\sqrt{2} = R\sqrt{2} = BC$.

Kẻ $OH \perp CD$, ta có: $CD = 2CH = 2.R\sin 60^0 = 2.R.\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.

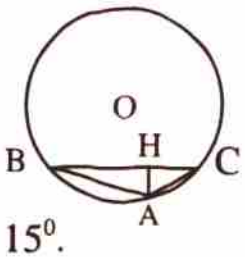
Tiếp theo: $BD = AC = AM + MC = AB.\sin 45^0 + CD.\sin 45^0 = \frac{R}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$.

☞ *Nhận xét*: Trong lời giải của câu a) chúng ta có thể thực hiện đơn giản hơn, bằng cách:

$$\text{sđ}\overset{\frown}{AD} = \text{sđ}\overset{\frown}{BC} = 90^0 \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow AB // CD.$$

Ví dụ 7: *Cho đường tròn* (O, R). *Cho một dây cung* AB *bằng cạnh hình vuông nội tiếp và một dây cung* BC *bằng cạnh tam giác đều nội tiếp* (C *và* A *nằm cùng phía đối với* BO). *Tính các cạnh của* ΔABC *và đường cao* AH *của nó theo* R.

✍ *Giải*



Theo giả thiết, ta có:

$AB = R\sqrt{2}$, $BC = R\sqrt{3}$.

Trong đường tròn (O), ta có:

$$\text{sđ}\overset{\frown}{AC} = \text{sđ}\overset{\frown}{BC} - \text{sđ}\overset{\frown}{AB} = 120^0 - 90^0 = 30^0 \Rightarrow \overset{\frown}{ABC} = 15^0.$$

Trong ΔABH, ta có: $AH = AB.\sin 15^0 = R\sqrt{2}\,.0{,}2588 \approx 0{,}37R$.

Vì ΔAHC vuông cân: $AC = AH\sqrt{2} = 2R.\ 0{,}2588 \approx 0{,}52R$.

☞ *Nhận xét*: Ví dụ trên thuộc dạng toán tính toán đơn giản. Tuy nhiên, để thực hiện được nó các em học sinh cần nhớ được công thức tính độ dài của tam giác đều và tứ giác đều nội tiếp trong đường tròn (O, R).

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Một đa giác đều nội tiếp đường tròn (O, R). Biết độ dài mỗi cạnh của nó là $R\sqrt{2}$. Hỏi đa giác đó là hình gì ?

Bài 2. Cho lục giác đều ABCDEF cạnh a. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M, và chúng cắt đường thẳng EF theo thứ tự tại N và P.

a. Chứng minh rằng ΔMNP là tam giác đều.

b. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔMNP.

Bài 3. Cho ngũ giác đều ABCDE. Hai đường chéo AC và AD cắt BE lần lượt tại M và N.

c. Tính tỉ số giữa các bán kính của đường tròn nội tiếp vâ đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đều đó.

d. Chứng minh rằng các tam giác ΔAMN và ΔCMB là tam giác cân.

e. Chứng minh rằng AB . BC = BM . AC.

Bài 4. Cho tam giác đều nội tiếp đường tròn (O) có cạnh 3cm.

a. Tính bán kính của đường tròn (O).

b. Tính cạnh lục giác đều ngoại tiếp đường tròn (O).

Bài 5. Cho ΔABC đều, nội tiếp đường tròn (O, R). Gọi D, E, F theo thứ tự là điểm chính giữa các cung AB, BC, CA.

a. Chứng minh rằng ADBECF là lục giác đều.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. Gọi a, n theo thứ tự là số đỉnh, độ dài cạnh của đa giác đều đó, ta có:

$a = R\sqrt{2}$

$$\sin\frac{180^0}{n} = \frac{a}{2R} = \frac{R\sqrt{2}}{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^0 \Rightarrow \frac{180^0}{n} = 45^0 \Leftrightarrow n = 4.$$

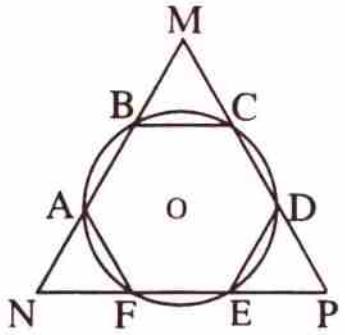
Vậy, đa giác cànn tìm là tứ giác đều (hình vuông).

Bài 2.

a. Hình lục giác đều có số đo mỗi góc trong bằng: $\frac{(6-2).180^0}{6} = 120^0$.

Suy ra, số đo mỗi góc ngoài bằng:

$180^0 - 120^0 = 60^0$.



Xét ΔMBC, ta có ngay:

$\widehat{BMC} = 180^0 - (\widehat{MBC} + \widehat{MCB}) = 60^0$.

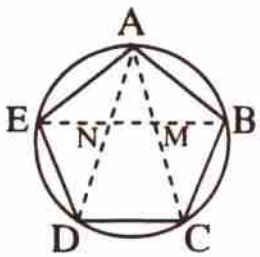
Xét ΔAFN, ta có ngay:

$\widehat{ANF} = 180^0 - (\widehat{NAF} + \widehat{NFA}) = 60^0$.

Vậy, ΔMNP có hai goác bằng 60^0 nên nó là tam giác đều.

b. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔMNP, ta có:

$$R = \frac{MN}{2\sin\frac{180^0}{3}} = \frac{3a}{2\sin 60^0} = a\sqrt{3}.$$



Bài 3.

a. Gọi a, R, r theo thứ tự là độ dài mỗi cạnh, bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp ABCDE, ta có:

$$R = \frac{a}{2\sin 36^0} \text{ và } r = \frac{a}{2\tan 36^0} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\frac{a}{2\tan 36^0}}{\frac{a}{2\sin 36^0}} = \frac{\sin 36^0}{\tan 36^0} \approx \frac{4}{5}.$$

b. Vì ABCDE là ngũ giác đều nên: $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EA}$.

Trong ΔAMN, ta có: $\widehat{AMN} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\widehat{EA} + \text{sđ}\,\widehat{BC}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\widehat{AB} + \text{sđ}\,\widehat{DE}) = \widehat{ANM}$

$\Leftrightarrow$ ΔAMN cân tại A.

Trong ΔCMB, ta có: $\widehat{BMC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\widehat{BC} + \text{sđ}\,\widehat{EA}) = \frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{CD} + \text{sđ}\,\widehat{DE}) = \widehat{MBC}$

$\Leftrightarrow$ ΔCMB cân tại B.

c. Nhận xét rằng: $\Delta ABC \sim \Delta AMB \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{MB} \Leftrightarrow BM \cdot AC = AB \cdot BC$, đpcm.

CHỦ ĐỀ 9

ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN

Đường tròn có bán kính R có độ dài được xác định bằng công thức: $C = 2\pi R$.

2. ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

Độ dài cung tròn 1^0 của đường tròn bán kính R là: $\ell = \dfrac{\pi R}{180}$.

Độ dài của cung tròn n^0 của đường tròn bán kính R là: $\ell = \dfrac{\pi R n}{180}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: (Bài 66/tr 95 – Sgk):

a. *Tính độ dài cung* 60^0 *của một đường tròn có bán kính* 2dm.

b. *Tính chu vi vành xe đạp có đường kính* 650mm.

✍ *Giải*

a. Ta có: $l = \dfrac{\pi.2.60}{180} = \dfrac{2\pi}{3} \approx 2{,}09$ dm.

b. Ta có: $C = \pi.650 \approx 2210$mm.

Ví dụ 2: *Tính độ dài của đường tròn, biết:*

a. *Có bán kính bằng* 6cm.

b. *Có đường kính bằng* 8cm.

c. *Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều có cạnh bằng* $2\sqrt{3}$ cm.

✍ *Giải*

a. Với giả thiết, ta có: $R = 6\text{cm} \Rightarrow C = 2\pi R = 2\pi.6 = 12\pi$ cm.

b. Với giả thiết, ta có: $2R = 8\text{cm} \Leftrightarrow R = 4\text{cm} \Rightarrow C = 2\pi R = 2\pi.4 = 8\pi$ cm.

c. Với giả thiết, ta có: $R = \dfrac{2\sqrt{3}}{2\sin 60^0} = 2\text{cm} \Rightarrow C = 2\pi R = 2\pi.2 = 4\pi$ cm.

Ví dụ 3: (Bài 75/tr 96 – Sgk): *Cho đường tròn* (O), *bán kính* OM. *Vẽ đường tròn tâm* O', *đường kính* OM. *Một bán kính* OA *của đường tròn* (O) *cắt đường tròn* (O') *tại* B. *Chứng minh* sđMA = sđMB.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Trong đường tròn (O), ta có:

$$\alpha = \overset{\frown}{AOM} = \overset{\frown}{BOM} = \frac{1}{2}\text{sđMB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BO'M} \Rightarrow \overset{\frown}{BO'M} = 2\overset{\frown}{AOM} = 2\alpha.$$

Độ dài cung AM là: $l = \dfrac{\pi.OM.\alpha}{180}$ (1)

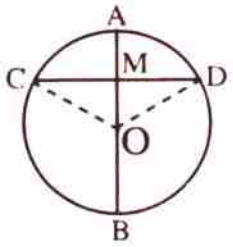
Độ dài cung AM là: $l' = \dfrac{\pi.O'M.2\alpha}{180} = \dfrac{\pi.'M.\alpha}{180}$ (2)

Từ (1) và (2), ta thấy độ dài các cung AM và BM bằng nhau.

Ví dụ 4: *Cho đường tròn* (O) *đường kính* AB. *Vẽ dây* CD *vuông góc với* AB *tại* M. *Giả sử* AM = 1cm, CD = $2\sqrt{3}$cm . *Tính*:

a. *Độ dài đường tròn.*

b. *Độ dài của cung* CAD.



Giải

a. Từ giả thiết ta có AB ⊥ CD nên: MC = MD = $\sqrt{3}$ cm,

$\overset{\frown}{ACB} = 90^0$ – vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.

Trong tam giác vuông ΔCAB, áp dụng hệ thức $h^2 = b'c'$, ta được:

$$CM^2 = MA \,.\, MB \Rightarrow MB = \frac{CM^2}{MA} = \frac{(\sqrt{2})^2}{1} = 3\,\text{cm}.$$

Khi đó: AB = AM + MB = 1 + 3 = 4 cm ⇒ R = 2 cm.

Độ dài đường tròn là: C = 2πR = 4π cm.

b. Ta có: OA = 2cm, MA = 1cm ⇒ MA = MO.

Từ giả thiết: CM ⊥ OA ⇒ CA = CO và OC = OA

⇒ CA = OC = OA ⇒ ΔOAC là tam giác đều ⇒ $\overset{\frown}{AOC} = 60^0$,

Do đó $\overset{\frown}{DOC} = 120^0$.

Độ dài của cung CAD là: $\ell = \dfrac{\pi Rn}{180} = \dfrac{\pi.2.120}{180} = \dfrac{4\pi}{3}$ cm .

Nhận xét:

1. Trong câu a), để tính được độ dài đường tròn chúng ta cần đi tìm bán kính R dựa trên việc tính độ dài của đường kính AB. Tuy nhiên, ta cũng có thể tính được R bằng cách:

   Trong tam giác vuông ΔOMC, ta có:

   $OC^2 = OM^2 + MC^2 = (OA - AM)^2 + MC^2$

   $\Leftrightarrow R^2 = (R-1)^2 + (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow R = 2$cm.

2. Trong câu b), với yêu cầu " *Tính độ dài của cung CAD* ", chúng ta cần thực hiện theo hai bước:

   Bước 1: Tính số đo của cung CAD, tức là tính $\overset{\frown}{COA}$.

   Bước 2: Sử dụng công thức tính độ dài cung.

Ví dụ 5: *Cho đường tròn* (O), *dây* AB = 9cm *có khoảng cách đến tâm bằng một nửa bán kính của đường tròn.*

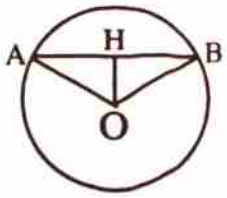
a. *Tính chu vi đường tròn.*

b. *Tính độ dài cung* AB (*cung nhỏ*).

✍ *Giải*

a. Kẻ OH ⊥ AB, khi đó trong tam giác vuông ΔOHB, ta có:

$$OH = \frac{OB}{2} \Rightarrow \widehat{OBH} = 30^0 \text{ và } \widehat{BOH} = 60^0.$$



$$OB = \frac{HB}{\sin 60^0} = \frac{4,5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Chu vi đường tròn: $C = 2\pi.3\sqrt{3} = 6\pi\sqrt{3}$ cm.

b. Ta có: $\widehat{AOB} = 120^0 \Rightarrow \text{sđ}\,\widehat{AB} = 120^0$.

Khi đó, độ dài cung $\widehat{AB}$ được cho bởi: $l_{AB} = 6\pi\sqrt{3}.\frac{1}{3} = 2\pi\sqrt{3}$ cm.

☛ ***Nhận xét***:

1. Để tính chu vi đường tròn hoặc độ dài cung tròn, bao giờ ta cũng phải tính bán kính của nó. Bán kính này là cạnh huyền OB của tam giác vuông OHB. Tam giác đó có cạnh góc vuông OH bằng một nửa cạnh huyền. Hãy nhớ lại: nếu một tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng một nửa cạnh huyền thì góc đối diện với cạnh góc vuông đó bằng 30^0. Có thể chứng minh trực tiếp điều này vào bài toán:

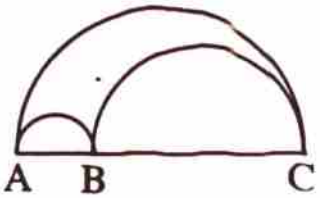
$$\sin \hat{B} = \frac{OH}{OB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B} = 30^0.$$

2. Trong lời giải câu b, ta tính trực tiếp độ dài cung AB, đó là $\frac{1}{3}$ chu vi đường tròn (vì $\widehat{AOB} = 120^0$). Nếu áp dụng công thức tính độ dài cung 120^0 ta có:

$$\frac{\pi R.120}{180} = \frac{\pi 3\sqrt{3}.120}{180} = 2\pi\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Ví dụ 6: (Bài 68/tr 95 – Sgk): *Cho ba điểm* A, B, C *liên tiếp trên một đường thẳng. Chứng minh rằng độ dài của nửa đường tròn có đường kính* AC *bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn có đường kính* AB *và* BC.

✍ *Giải*



Gọi độ dài các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự AC, AB, BC là l_1, l_2, l_3, ta có:

$$l_1 = \frac{1}{2}\pi.AC,\ l_2 = \frac{1}{2}\pi.AB,\ l_3 = \frac{1}{2}\pi.BC.$$

Nhận xét rằng: $l_2 + l_3 = = \frac{1}{2}\pi.AB + \frac{1}{2}\pi.BC = \frac{1}{2}\pi(AB + BC) = \frac{1}{2}\pi.AC = l_1$.

☞ *Nhận xét*:

1. Người ta có thể phát biểu bài toán trên theo chiều ngược lại, như sau "*Cho ba điểm A, B, C. Biết rằng độ dài đường tròn đường kính AC bằng tổng các độ dài hai đường tròn đường kính AB và BC. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng và điểm B nằm giữa A và C*".
2. Từ đó, ta có kết quả tổng quát: $C_{(AC)} \le C_{(AB)} + C_{(BC)}$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Một tam giác đều và một hình vuông cùng có chu vi là 72cm. Hỏi độ dài đường tròn ngoại tiếp hình nào lớn hơn? Lớn hơn bao nhiêu?

Bài 2. Cho đoạn thẳng AD = 12cm. Các điểm B, C thuộc đoan thẳng AD sao cho AB = CD. Vẽ các đường tròn có đường kính theo thứ tự là AD và BC. Biết chu vi đường tròn lớn bằng ba lần chu vi đường tròn nhỏ. Tính chu vi của đường tròn nhỏ.

Bài 3. Cho hai đường tròn (O, R) và (O'; R') tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) tại B, cắt đường tròn (O') tại C. Chứng minh rằng nếu $R' = \frac{1}{2}R$ thì độ dài của cung $\overset{\frown}{AC}$ bằng nửa độ dài của cung AB (chỉ xét các cung AC, AB nhỏ hơn nửa đường tròn).

Bài 4. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. C là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Cung AD có tâm B bán kính 2R, cung BE có tâm A bán kính 2R, cung DE có tâm C bán kính CD.

a. Chứng minh rằng hai cung AC và AD dài bằng nhau.
b. Tính độ dài của đường cong ADEB do ba cung AD, DE, EB chắp nối thành.

Bài 5. Cho ΔABC vuông ở A, $\hat{C} = 30^0$ và AB = 4cm. Vẽ đường cao AH. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và AC.

a. Chứng minh rằng tứ giác AMHN nội tiếp được.
b. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tứ giác AMHN.

Bài 6. Cho hình vuông ABCD có AC = 4cm. Ở phía ngoài hình vuông, vẽ các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, BC, CD, DA. Bốn nửa đường tròn đó tạo thành hình hoa bốn cánh. Tính chu vi của hình hoa ấy.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. Gọi a_1, a_2 theo thứ tự là độ dài cạnh của tam giác đều và hình vuông, suy ra:
$3a_1 = 72 \Leftrightarrow a_1 = 24$cm; $4a_2 = 72 \Leftrightarrow a_2 = 18$cm.

Gọi R_1, R_2 theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều và hình vuông, suy ra: $R_1 = \dfrac{a_1}{2\sin\dfrac{180^0}{3}} = \dfrac{24}{2\sin 60^0} = 8\sqrt{3}$ chứng minh

$$\Rightarrow C_1 = 2\pi R_1 = 16\pi\sqrt{3} \approx 87.06\text{cm}.$$

$$R_2 = \frac{a_2}{2\sin\dfrac{180^0}{4}} = \frac{18}{2\sin 45^0} = 9\sqrt{2}\ \text{cm} \Rightarrow C_2 = 2\pi R_1 = 18\pi\sqrt{2} \approx 79.97\text{cm}.$$

Từ đó, ta thấy $C_1 > C_2$ và $C_1 - C_2 \approx 7.08$cm.

CHỦ ĐỀ 10

DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN

Diện tích hình tròn bán kính R là: $S = \pi R^2$.

2. DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN

Định nghĩa: *Hình quạt tròn là một phần hình tròn bao gồm giữa một cung tròn và hai bán kính qua hai đầu mút của cung đó.*

Trong hình minh hoạ bên, ta có hình quạt tròn AOB (hình gạch kẻ).

Diện tích hình quạt n^0 bán kính R được cho bởi: $S_{quạt} = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$.

3. DIỆN TÍCH HÌNH VIÊN PHÂN

Định nghĩa: Hình viên phân là một phần hình tròn bao gồm giữa một cung tròn và dây trương cung đó.

Trong hình minh hoạ bên, ta có hình viên phân AmB (hình gạch kẻ).

Diện tích hình viên phân AmB được cho bởi:

$$S_{AmB} = S_{quạt}AOB - S_{\Delta AOB}.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: (Bài 77/tr 98 – Sgk): *Tính diện tích hình tròn nội tiếp một hình vuông có cạnh là* 4cm.

Giải

Hình tròn nội tiếp hình vuông có đường kính d bằng cạnh hình vuông: d = 4 cm.

Hình tròn nội tiếp hình vuông cạnh 4cm là: $S = \dfrac{\pi d^2}{4} = \dfrac{\pi 4^2}{4} = 4\pi \approx 12{,}56\ cm^2$.

Ví dụ 2: *Tính diện tích hình tròn, biết:*

a. *Bán kính bằng* 8cm.

b. *Đường kính bằng* 12cm.

c. *Chu vi của đường tròn đó bằng* 18π.

✍ *Giải*

a. Với giả thiết, ta có: $R = 8cm \Rightarrow S = \pi.8^2 = 64\pi\ cm^2$.

b. Với giả thiết, ta có: $2R = 8cm \Leftrightarrow R = 4cm \Rightarrow S = \pi.4^2 = 16\pi\ cm^2$.

c. Với giả thiết, ta có: $2\pi R = 18\pi \Leftrightarrow R = 9cm \Rightarrow S = \pi.9^2 = 81\pi\ cm^2$.

Ví dụ 3: (Bài 81/tr 99 – Sgk): *Diện tích hình tròn sẽ thay đổi thế nào nếu*:

a. *Bán hình tăng gấp đôi*?

b. *Bán hình tăng gấp ba*?

c. *Bán hình tăng gấp* k *lần* (k > 1)?

✍ *Giải*

Diện tích hình tròn có bán kính (k.R) là: $S = \pi(kR)^2 = k^2.(\pi R^2)$.

a. Nếu bán kính tăng gấp đôi thì diện tích hình tròn tăng gấp 4 lần.

b. Nếu bán kính tăng gấp ba thì diện tích hình tròn tăng gấp 9 lần.

c. Nếu bán kính tăng gấp k lần thì diện tích hình tròn tăng gấp k^2 lần.

Ví dụ 4: (Bài 79/tr 98 – Sgk): *Tính diện tích hình quạt tròn có bán kính bằng* 6cm *và góc ở tâm tương ứng là* 36^0.

✍ *Giải*

Ta có ngay: $S_{quạt} = \dfrac{\pi R^2 n}{360} = \dfrac{\pi.6^2.36}{360} \approx 11.3\ cm^2$.

Ví dụ 5: *Tính diện tích hình viên phân* $\overset{\frown}{AmB}$ (*hình trên*), *biết* $\overset{\frown}{AOB} = 60^0$ *và bán kính đường tròn bằng* 8cm.

✍ *Giải*

Ta có ngay: $S_{AmB} = S_{quạt}AOB - S_{\Delta AOB} = \dfrac{\pi.8^2.60}{360} - \dfrac{8^2\sqrt{3}}{4} \approx 5.79\ cm^2$.

Ví dụ 6: (Bài 87/tr 100 – Sgk): *Lấy cạnh* BC *của một tam giác đều làm đường kính, vẽ một nửa đường tròn về cùng một phía với tam giác ấy đối với đường thẳng* BC. *Cho biết cạnh* BC = a, *hãy tính diện tích của hai hình viên phân được tạo thành.*

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Gọi O là trung điểm của BC, ta có: $OB = OC = \dfrac{a}{2}$.

Gọi D, E theo thứ tự là giao điểm của AB và AC với đường tròn đường kính BC.

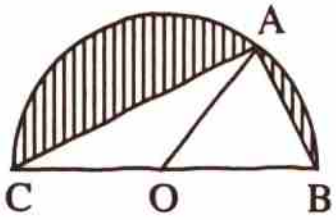
Dễ thấy OAB, OEC là các tam giác đều.

Từ đó, ta có diện tích của hai hình viên phân gạch sọc là:

$$S = 2\left[\frac{\pi.a^2}{24} - \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \left[\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right]a^2 \approx 0{,}045a^2.$$

Ví dụ 7: *Cho* ΔABC *vuông tại* A *có* AB = 10m, $\hat{B} = 60^0$. *Vẽ nửa đường tròn* (O) *đường kính* BC *và đi qua điểm* A. *Tính tổng diện tích hai hình viên phân ứng với cung* AB *và cung* AC.

Giải



Tổng diện tích hai hình viên phân bằng diện tích nửa hình tròn trừ đi diện tích ΔABC.

Diện tích nửa hình tròn: $\frac{\pi.OB^2}{2} = \frac{\pi.100}{2} = 50\pi\,m^2$.

Với ΔABC, ta có: $AC = AB.\tan 60^0 = 10\sqrt{3}$ m ; BC = 2AB = 20 m

$$S_{ABC}\,\frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}.10.10\sqrt{3} = 50\sqrt{3}\,m^2.$$

Tổng diện tích hai hình viên phân: $50\pi - 50\sqrt{3} = 50(\pi - \sqrt{3})\ m^2$

Ví dụ 8: (Bài 83/tr 99 – Sgk):

a. *Vẽ lại hình sgk* (*tạo bởi các cung tròn*) *với* HI = 10cm và HO = BI = 2cm. *Nêu cách vẽ.*

b. *Tính diện tích hình* HOABINH (*miền gạch sọc*).

c. *Chứng tỏ rằng hình tròn đường kính* NA *có cùng diện tích với hình* HOABINH *đó.*

Giải – Bạn đọc tự vẽ hình

a. Cách vẽ:

- Kẻ đường thẳng HI = 10cm.
- Vẽ cung tròn HI có số đo bằng 180^0.
- Lấy O thuộc đoạn HI sao cho HO = 2cm. Vẽ cung tròn HO có số đo bằng 180^0 của đường tròn (S_1 ; 5cm).
- Lấy B thuộc đoạn HI sao cho BI = 2cm. Vẽ cung tròn BI có số đo bằng 180^0 của đường tròn (S_2 ; 1cm).
- Vẽ cung tròn BO có số đo bằng 180^0 của đường tròn (S_3 ; 1cm).

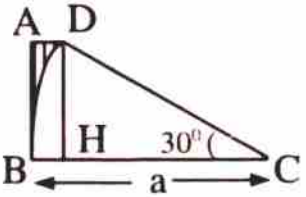
b. Ta có diện tích hình gạch sọc là:

$$S = \pi\frac{HI^2}{8} + \pi\frac{OB^2}{8} - \pi\frac{HO^2}{4} = \pi\left(\frac{100}{8} + \frac{36}{8} - \frac{4}{4}\right) = 16\pi\ (cm^2).$$

Ta có: AN = 3 + 5 = 8 (cm).

c. Diện tích hình tròn đường kính NA là: $S = \frac{\pi.8^2}{4} = 16\pi\ (cm^2)$.

Ví dụ 9: *Tính diện tích của phần gạch sọc trên hình.*



Giải

Diện tích phải tìm bằng hiệu của diện tích hình thang vuông ABCD và hình quạt 30^0.

Kẻ DH ⊥ BC, ta được:

$$DH = CD\sin 30^0 = \frac{a}{2},\ HC = CD\cos 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ AD = BH = BC - HC = a - \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Khi đó: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(a + a - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right).\frac{a}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{8}$ và $S_{quạt} = \frac{\pi a^2}{12}$.

Diện tích phải tìm:

$$S = S_{ABCD} - S_{quạt} = \frac{a^2}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi a^2}{12} = \frac{a^2}{24}(12 - 3\sqrt{3} - 2\pi) \approx 0{,}025a^2.$$

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Một hình vuông và một hình tròn có cùng chu vi. Hỏi hình nào có diện tích lớn hơn ?

Bài 2. Cho ΔABC đều nội tiếp đường tròn (O; 6cm). Tính diện tích viên phân giới hạn bởi dây BC và cung nhỏ BC.

Bài 3. Hình vành khăn là phần hình tròn bao gồm giữa hai đường tròn đồng tâm. Tính diện tích hình vành khăn tạo thành bởi đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác đều có cạnh 6cm.

Bài 4. (Bài 84/tr 99 – Sgk):

a. Vẽ lại hình tạo bởi các cung tròn xuất phat từ đỉnh C của tam giác đều ABC cạnh 1cm. Nêu cách vẽ.

b. Tính diện tích miền gạch sọc.

Bài 5. Một đường tròn có độ dài là 72cm. Tính diện tích hình viên phân tạo thành bởi một cạnh của tam giác đều nội tiếp và cung nhỏ bị trương.

Bài 6. Cho đường tròn (O; 2cm), một điểm M có $MO = 2\sqrt{2}$cm. Qua M vẽ hai tiếp uyến MA, MB với đường tròn (A, B là tiếp tuyến điểm). Tính diện tích giới hạn bởi các đoạn thẳng MA, MB và cung nhỏ AB.

Bài 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R, C là điểm chính giữa của cung AB. Vẽ cung AB có tâm C bán kính CA. Tính diện tích hình trăng giới hạn bởi cung AB của đường tròn (C) và cung AB không chứa C của đường tròn (O).

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1. Gọi C là độ dài chu vi của hình vuông và hình tròn.

Gọi a là độ dài cạnh hình vuông, suy ra: $C = 4a \Leftrightarrow a = \dfrac{C}{4} \Rightarrow S_{hv} = a^2 = \dfrac{C^2}{16}$.

Gọi R là bán kính của hình tròn, suy ra:

$$C = 2\pi R \Leftrightarrow R = \frac{C}{2\pi} \Rightarrow S_{htr} = \pi.R^2 = \pi.\frac{C^2}{4\pi^2} = \frac{C^2}{4\pi} > \frac{C^2}{16}.$$

Vậy, hình tròn có diện tích lớn hơn hình vuông.

Bài 2. *Hướng dẫn*: Ta có ngay: $S_{BmC} = S_{qu't}BOC - S_{\Delta BOC}$.

Bài 3. Gọi R, r theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều, ta có:

$$R = \frac{a}{2\sin\dfrac{180^0}{3}} = \frac{6}{2\sin 60^0} = 2\sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow S_{\text{ngoại tiếp}} = \pi R^2 = \pi.(2\sqrt{3})^2 = 12\pi \text{ cm}^2.$$

$$r = \frac{a}{2\tan\dfrac{180^0}{3}} = \frac{6}{2\tan 60^0} = \sqrt{3} \text{ cm} \Rightarrow S_{\text{nội tiếp}} = \pi r^2 = \pi.(\sqrt{3})^2 = 3\pi \text{ cm}^2.$$

Khi đó, hình vành khăn có diện tích: $S = S_{\text{ngoại tiếp}} - S_{\text{nội tiếp}} = 12\pi - 3\pi = 9\pi \text{ cm}^2$.

Bài 4.

a. Cách vẽ:

- Vẽ cung CD có số đo bằng 120^0 của đường tròn (A ; 1cm).
- Vẽ cung DE có số đo bằng 120^0 của đường tròn (B ; 2cm)
- Vẽ cung EF có số đo bằng 120^0 của đường tròn (C ; 3cm)

b. Diện tích miền gạch sọc là: $S = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi.2^2}{3} + \dfrac{\pi.3^2}{3} = \dfrac{14\pi^2}{3} \approx 14{,}65 \text{ (cm}^2\text{)}$.

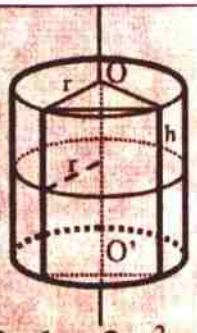
CHỦ ĐỀ 1

HÌNH TRỤ

DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH TRỤ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Cho hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy bằng r.



1. Khi cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với đáy thì được mặt cắt là một hình tròn bằng hình tròn đáy.
2. Khi cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với trục thì được mặt cắt là một hình chữ nhật.
3. Diện tích xung quanh của hình trụ được tính theo công thức: $S_{xq} = 2\pi rh$.
4. Diện tích toàn phần của hình trụ được tính theo công thức: $S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2$.
5. Thể tích của hình trụ được tính theo công thức: $V = Sh = \pi r^2 h$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: (Bài 6/tr 111 – Sgk): *Chiều cao của một hình trụ bằng bán kính đường tròn đáy. Diện tích xung quanh của hình trụ là* $314cm^2$. *Hãy tính bán kính đường tròn đáy và thể tích hình trụ (làm tròn kết quả đến số thập phân thứ hai).*

Giải

Gọi bán kính đáy của hình trụ là r thì chiều cao h = r.

$S_{xq} = 2\pi rh \Rightarrow 2\pi r^2 = 314.$

Lấy $\pi = 3,14 \Rightarrow r^2 = \dfrac{314}{2.3,14} = 50 \Rightarrow r = 5\sqrt{2}$.

Thể tích hình trụ: $V = \pi r^2 h = \pi.50.5\sqrt{2} = 250\sqrt{2}.\pi \approx 1110\ (cm^3)$.

Ví dụ 2: (Bài 7/tr 111 – Sgk): *Một bóng đèn huỳnh quang dài* 1,2m, *đường kính của đường tròn đáy là* 4cm, *được đặt khít vào một ống giấy cứng dạng hình hộp. Tính diện tích phần giấy cứng dùng để làm hộp (Hộp mở hai đầu, không tính lề và mép dán).*

Giải

Chu vi đáy hộp: 2p = 16 (cm)

Diện tích xung quanh hình hộp là: $16 \times 120 = 1920\ (cm^2)$

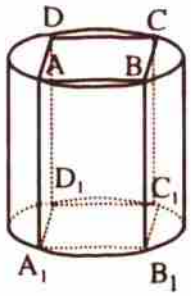
Ví dụ 3: *Một hình trụ có bán kính đáy* R *và thiết diện qua trục là một hình vuông.*

a. *Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.*

b. *Tính thể tích của khối trụ tương ứng.*

c. *Tính thể tích của khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong khối trụ đã cho.*

Giải



a. Vì thiết diện qua trục là một hình vuông nên hình trụ có chiều cao bằng 2R.

Ta có ngay:

$S_{xq} = 2\pi R.2R = 4\pi R^2$.

$S_{tp} = S_{xq} + 2B = 4\pi R^4 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$.

b. Ta có ngay: $V = \pi R^2.R = 2\pi R^3$.

c. Gọi $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong khối trụ đã cho, ta có $AB = R\sqrt{2}$.

Do đó, thể tích V_1 của được cho bởi: $V_1 = (R\sqrt{2})^2.2R = 4R^3$.

Ví dụ 4: (Bài 48/tr 129 – Sgk): *Hãy tính thể tích, diện tích bề mặt một chi tiết máy theo kích thước đã cho trên hình* 114 – SGK.

Giải

Diện tích cần tính gồm diện tích xung quanh hai hình trụ và diện tích hai hình tròn:

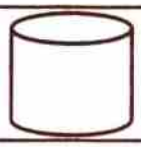
- Hình trụ thứ nhất có đường kính đáy 11cm và chiều cao 2cm, có diện tích:
  $S_1 = \pi.11.2 = 22\pi$ (cm^2).
- Hình trụ thứ hai có đường kính đáy 6cm và chiều cao 7cm, có diện tích:
  $S_2 = \pi.6.7 = 42\pi$ (cm^2).
- Phần còn lại có liên quan đến:
  Một hình tròn có bán kính đáy 5,5cm.
  Một hình vành khăn có bán kínhlớn 5,5cm và bán kính nhỏ là 3cm.
  Một hình tròn có bán kính 3cm.
  ⇒ Tổng diện tích các hình tròn này bằng:
  $S_3 = \pi.(5,5)^2 + \pi.(5,5^2 - 3^2) + \pi.3^2 = 60,5\pi$.

Diện tích chi tiết máy là: $S = S_1 + S_2 + S_3 \approx 319$ (cm^2)

Thể tích chi tiết máy là: $V = \pi.(5,5)^2.2 + \pi.3^2.7 = 123,5\pi \approx 388$ (cm^3).

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Điền đủ các kết quả vào những ô trống của bảng sau (đơn vị: cm):

Hình	Bán kính đáy	Chiều cao	Chu vi đáy	Diện tích đáy	Diện tích xung quanh	Thể tích
	1	10				
	5	4				
		8	4π			

Bài 2. Cho một hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính R, chiều cao hình trụ là $R\sqrt{2}$. Trên hai đường tròn O và O' có hai điểm di động A, B sao cho (OA, O'B) = α không đổi.

a. Tính diện tích xung quanh hình trụ.

b. Tính thể tích hình trụ.

Bài 3. Một hình trụ có bán kính đáy là 7cm, diện tích xung quanh bằng $352cm^2$. Tính chiều cao của hình trụ đó.

Bài 4. Một hình trụ có thể V không đổi. Tính bán kính đáy và chiều cao của hình trụ để:

a. Diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất.

b. Diện tích xung quanh cộng diện tích một đáy đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5. (Bài 10/tr 112 – Sgk):

a. Diện tích xung quanh của một hình trụ có chu vi hình tròn đáy là 13cm và chiều cao là 3cm.

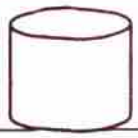
b. Thể tích của hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 5mm và chiều cao là 8mm.

Bài 6. Người ta nhấn chìm hoàn toàn một tượng đá nhỏ vào một lọ thuỷ tinh có nước hình dạng trụ. Diện tích đáy lọ thuỷ tinh là $12,8cm^2$. Nước trong lọ dâng lên thêm 8,5mm. Hỏi thể tích của tượng đá là bao nhiêu?

Bài 7. Cho hình chữ nhật ABCD (AB = 2a, BC = a). Quay hình chữ nhật đó quanh AB thì được hình trụ có thể tích V_1; quay quanh BC thì được hình trụ có thể tích V_2. Chứng minh rằng $V_2 = 2V_1$.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: Ta có bảng kết quả:

Hình	Bán kính đáy	Chiều cao	Chu vi đáy	Diện tích đáy	Diện tích xung quanh	Thể tích
	1	10	2π	π	20π	10π
	5	4	10π	25π	40π	100π
	2	8	4π	4π	32π	32π

Bài 2: a. $S_{xq} = 2\pi R^2\sqrt{2}$. b. $V = \pi R^3\sqrt{2}$.

Bài 3: Ta có: $S_{xq} = 2\pi rh \Rightarrow h = \dfrac{S_{xq}}{2\pi r} = \dfrac{352}{2\pi.7} = \dfrac{352}{14.3,14} \approx 8(cm)$

Bài 4: a. $h = 2R$. b. $h = R$.

Bài 5:

a. Diện tích xung quanh của một hình trụ có chu vi hình tròn đáy là 13cm và chiều cao là 3cm: $S_{xq} = 13.3 = 39\ (cm^2)$

b. Thể tích của hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 5mm và chiều cao là 8mm:

$V = \pi r^2h \approx 3,14.5^2.8 = 628\ (mm^3)$.

Bài 6: Thể tích của tượng đá bằng thể tích phần nước dâng lên trong ống nghiệm bằng: $12,8 \times 0,85 = 10,88\ (cm^3)$

Bài 7: Khi quay hình chữ nhật xung quanh AB thì ta được hình trụ có:

- Chiều cao: $h_1 = AB = 2a$
- Bán kính đáy: $r_1 = BC = a$
- Thể tích: $V_1 = \pi.a^2.2a = 2\pi a^3$

Khi quay hình chữ nhật xung quanh BC thì ta được hình trụ có:

- Chiều cao: $h_2 = BC = a$
- Bán kính đáy: $r_2 = AB = 2a$
- Thể tích: $V_2 = \pi.(2a)^2.a = 4\pi a^3$

Vậy, ta có đẳng thức: $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2\pi a^3}{4\pi a^3} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow V_2 = 2V_1$.

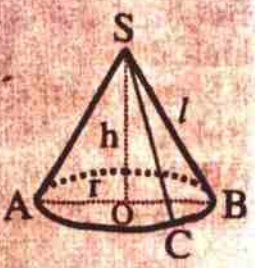
CHỦ ĐỀ 2

HÌNH NÓN – HÌNH NÓN CỤT
DIỆN TÍCH XUNG QUANH VÀ THỂ TÍCH CỦA HÌNH NÓN, HÌNH NÓN CỤT

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. HÌNH NÓN

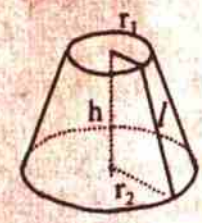
Cho hình nón có đường cao h, đường sinh l và bán kính đáy bằng r.



1. Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì được mặt cắt là một hình tròn.
2. Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với trục thì được mặt cắt là một tam giác cân.
3. Diện tích xung quanh của hình nón được tính theo công thức:
$$S_{xq} = \pi r l.$$
4. Diện tích toàn phần của hình nón được tính theo công thức:
$$S_{tp} = \pi r l + \pi r^2.$$
5. Thể tích của hình nón được tính theo công thức: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

2. HÌNH NÓN CỤT

Cho hình nón cụt có đường cao h, đường sinh l và r_1, r_2 là các bán kính đáy.



1. Khi cắt hình nón cụt bởi một mặt phẳng song song với đáy thì được mặt cắt là một hình tròn.
2. Khi cắt hình nón cụt bởi một mặt phẳng song song với trục thì được mặt cắt là một hình thang cân.
3. Diện tích xung quanh của hình nón cụt được tính theo công thức:
$$S_{xq} = \pi(r_1 + r_2)l.$$
4. Diện tích toàn phần của hình nón cụt được tính theo công thức:
$$S_{tp} = \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2.$$
5. Thể tích của hình nón cụt được tính theo công thức:
$$V = \frac{1}{3}\pi(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)h.$$

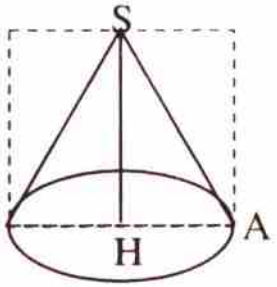
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: (Bài 15/tr 117 – Sgk): *Một hình nón được đặt vào bên trong một hình lập phương (cạnh của hình lập phương bằng 1). Hãy tính:*

a. *Bán kính đáy của hình nón.*

b. *Độ dài đường sinh.*

Giải



a. Một hình nón được đặt vào bên trong một hình lập phương có cạnh bằng 1. Đáy của hình nón nội tiếp đáy của hình lập phương.

Do đó, bán kính hình nón là: $r = \frac{1}{2}$.

b. Chiều cao của hình nón cũng là chiều cao của hình lập phương nên:

$$SH = 1 ; HA = r = \frac{1}{2} \Rightarrow l = SA, SA^2 = SH^2 + AH^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Vậy, ta được $l = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 2: *Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng* a.

a. *Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón.*

b. *Tính thể tích của khối nón tương ứng.*

Giải

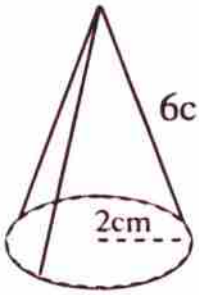
a. Vì thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a nên hình nón có: $R = h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $l = a$.

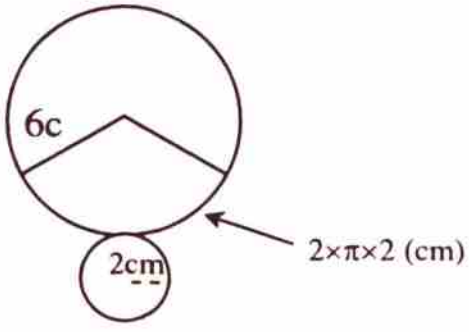
Ta có ngay: $S_{xq} = \pi.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

$$S_{tp} = S_{xq} + B = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2} + \pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{(\sqrt{2}+1)\pi a^2}{2}.$$

b. Ta có ngay: $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$.

Ví dụ 3: (Bài 16/tr 117 – Sgk): *Mặt cắt xung quanh của một hình nón theo một đường sinh và trải phẳng ra thành một hình quạt. Biết bán kính hình quạt tròn bằng độ dài đường sinh và độ dài cung bằng chu vi đáy. Quan sát hình sau và tính số đo cung của hình quạt tròn.*





Giải

Gọi góc ở tâm hình quạt là x^0.

Bán kính hình tròn chứa hình quạt là **R = 6cm.**

Do đó, chu vi của hình tròn này là: $S = 2\pi R = 2\pi.6 = 12\pi$.

Độ dài cung của hình quạt là: $l = 2.2.\pi = 4\pi$.

Vậy, góc ở tâm hình quạt là: $x = \frac{4\pi}{12\pi}.360^0 = 120^0$.

Ví dụ 4: (Bài 21/tr 118 – Sgk): *Cái mũ của chú hề với các kích thước cho theo hình vẽ (hình 97 – sgk). Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ (không kể riềm, mép, phần thừa).*

Giải

Bán kính đáy hình nón: $r = \frac{35}{2} - 10 = 7,5$ (cm).

Diện tích xung quanh hình nón: $S_{xq}.\pi rl = \pi.7,5.30 = 225\pi$ (cm^2).

Diện tích phân vành khăn: $S = (17,5^2 - 7,5^2).\pi = 250\pi$ (cm^2).

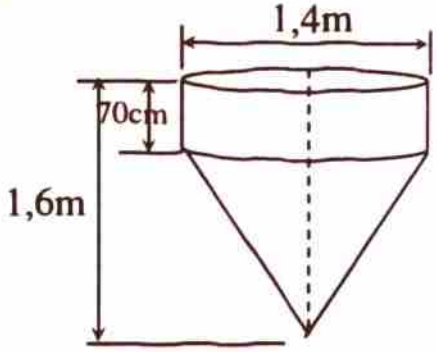
Tổng diện tích vải cần để làm mũ: $225\pi + 250\pi = 475\pi \approx 706$ (cm^2).

Ví dụ 5: (Bài 27/tr 119 – Sgk): *Một dụng cụ gồm một phần có dạng hình trụ, phần còn lại có dạng hình nón. Các kích thước cho trên hình. Hãy tính:*

a. *Thể tích của dụng cụ này.*

b. *Diện tích mặt ngoài của dụng cụ (không tính nắp đậy).*

Giải



a. Thể tích phần hình nón là:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi.(70)^2.90 = 147000\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Thể tích phần hình trụ là:

$$V_2 = \pi.(70)^2.90 = 343000\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Thể tích của dụng cụ là:

$$147000\pi + 343000\pi = 490000\pi \approx 1538600 \text{ (cm}^3\text{)} \approx 1,54 \text{ (m}^3\text{)}$$

b. Diện tích phần hình trụ: $2\pi.70.70 = 9800\pi$ (cm^2)

Đường sinh của hình nón là: $l^2 = 90^2 + 70^2 = 13000 \Rightarrow l \approx 114$ (cm)

Diện tích phần hình nón $\pi.70.114 = 7980\pi$ (cm^2)

Diện tích mặt ngoài dụng cụ:

$$7980\pi + 9800\pi = 17780\pi \approx 55829 \text{ (cm}^2\text{)} \approx 5,6 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Ví dụ 6: *Hình nón cụt có chiều cao 2a và hai bán kính đáy lần lượt là a và 4a.*

a. *Tính độ dài đường sinh.*

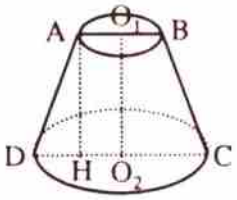
b. *Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón cụt.*

c. *Tính thể tích của khối nón cụt tương ứng.*

Giải

a. Ta thấy ngay thiết diện ABCD là hình thang cân và $O_1A = a$, $O_2D = 4a$, $O_1O_2 = 2a$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên CD, ta có:



$AH = O_1O_2 = 2a$.

$l = AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{O_1O_2^2 + (DO_2 - AO_1)^2}$

$= \sqrt{4a^2 + (4a - a)^2} = a\sqrt{13}$.

b. Ta có: $S_{xq} = \pi(a + 4a).a\sqrt{13} = 5\pi a^2\sqrt{13}$.

$S_{tp} = S_{xq} + B_1 + B_2 = 5\pi a^2\sqrt{13} + \pi a^2 + 16\pi a^2 = \pi a^2(5\sqrt{13} + 17)$.

c. Ta có: $V = \frac{1}{3}\pi(a^2 + 16a^2 + 4a^2).2a = 14\pi a^3$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Khi quay tam giác vuông AOC (vuông tại O) quanh cạnh AO để tạo ra một hình nón thì góc $\widehat{CAO}$ gọi là nửa góc ở đỉnh của hình nón. Biết nửa góc ở đỉnh của một hình nón là 30^0, độ dài đường sinh là a. Tính số đo cung của hình quạt khi khai triển mặt xung quanh của hình nón.

Bài 2. Cho hình nón tròn S, đáy là một hình tròn tâm O bán kính R, chiều cao của hình nón bằng 2R. Tính thể tích của hình nón.

Bài 3. Tính thể tích của hình nón trong các trường hợp sau:

a. Đường sinh là *l* và góc hợp bởi đường sinh và bán kính đáy tương ứng bằng α.

b. Bán kính đáy là R, góc giữa đường sinh và trục của hình nón là β.

c. Thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có diện tích là S.

Bài 4. Viết công thức tính nửa góc ở đỉnh của một hình nón (góc α của tam giác vuông AOS) sao cho diện tích mặt khai triển của mặt nón bằng một phần tư diện tích của hình tròn (bán kính SA).

Bài 5. Cho ba điểm A, O, B thẳng hàng theo thứ tự đó, OA = a, OB = b (a, b cùng đơn vị: cm). Qua A và B vẽ theo thứ tự các tia Ax và By cùng vuông góc với AB và cùng phía với AB. Qua O vẽ hai tia vuông góc với nhau và cắt Ax ở C, By ở D.

a. Chứng minh AOC và BDO là hai tam giác đồng dạng; từ đó suy ra tích AC.BD không đổi.

b. Tính diện tích hình thang ABCD khi $\widehat{COA} = 60^0$.

c. Với $\widehat{COA} = 60^0$ cho hình vẽ quay xung quanh AB. Hãy tính tỉ số thể tích các hình do các tam giác AÔC và BOD tạo thành.

Bài 6. Một hình nón cụt có các đường chéo của thiết diện qua trục vuông góc với nhau, đường sinh có độ dài l và tạo với bán kính tương ứng thuộc đáy lớn một góc α.

a. Tính diện tích xung quanh của hình nón cụt.

b. Tính thể tích của khối nón cụt tương ứng.

Bài 7. Cho hình nón cụt có bán kính đáy lớn gấp 2 lần bán kính đáy nhỏ, chiều cao hình nón cụt là h, đường chéo của thiết diện qua trục vuông góc với cạnh bên của thiết diện đó.

a. Tính diện tích toàn phần của hình nón cụt.

b. Tính thể tích của khối nón cụt tương ứng.

Bài 8. Cho hình nón cụt có bán kính đáy lớn gấp 2 lần bán kính đáy nhỏ, chiều cao hình nón cụt là h, đường chéo của thiết diện qua trục vuông góc với cạnh bên của thiết diện đó.

a. Tính diện tích toàn phần của hình nón cụt.

b. Tính thể tích của khối nón cụt tương ứng.

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: Bán kính đáy hình nón: $r = OC = a.\cos 30^0 = a.\frac{1}{2} = \frac{a}{2}$

Gọi n^0 là độ lớn của góc ở tâm của khai triển hình nón thì:

$$n^0 = \frac{r}{l}.360^0 = \frac{\frac{a}{2}}{a}.360^0 = 180^0.$$

Bài 2: $\frac{2\pi R^3}{3}$.

Bài 3: $V = \frac{1}{3}\pi l^3\cos^2\alpha.\sin\alpha.$; b. $\frac{1}{3}\pi R^3\cos\beta.$; c. $\frac{1}{3}\pi S\sqrt{S}$.

Bài 4: Gọi α là nửa góc ở đỉnh hình nón, ta có:

$\sin\alpha = \frac{r}{l}$, l là đường sinh, r là bán kính đáy hình nón.

Theo giả thiết ta có: $\pi rl = \frac{1}{4}\pi l^2. \Rightarrow \frac{r}{l} = \frac{1}{4}$.

Vậy, ta được $\sin\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = 14^0 28'$.

Bài 5:

a. Ta có: $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 90^0$, $\widehat{D_1} + \widehat{D_2} = 90^0 \Rightarrow \hat{O}_1 = \widehat{D_2}$. Suy ra, $\Delta AOC \backsim \Delta BDO$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AO} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow AC.BD = AO.BO \Rightarrow AC.BD = a.b \text{ – không đổi.}$$

b. Ta có: $\widehat{COA} = 60^0 \Rightarrow AC = a.\tan 60^0 = a\sqrt{3} \Rightarrow BD = b.\tan 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy, ta được:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AB(AC + BD) = \frac{1}{2}(a + b)\left(a\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}(a + b)(3a + b).$$

Bài 6: a. $\pi l^2.\sin\alpha.$; b. $V = \frac{\pi l^3}{12}(2\sin^2\alpha + 1)\sin\alpha$.

Bài 7: a. $\frac{11\pi h^2}{3}.$; b. $V = \frac{7\pi h^3}{9}$.

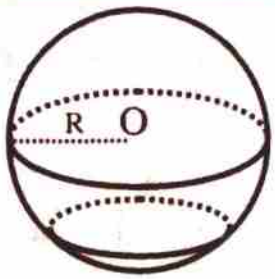
Bài 8: a. $\frac{11\pi h^2}{3}.$; b. $\frac{7\pi h^3}{9}$.

CHỦ ĐỀ 3

HÌNH CẦU – DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH HÌNH CẦU

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Cho hình cầu có bán kính đáy bằng R.



1. Khi cắt hình cầu bởi một mặt phẳng thì được mặt cắt là một hình tròn.
2. Khi cắt mặt cầu bởi một mặt phẳng thì được mặt cắt là một đường tròn:
   - Đường tròn có bán kính R nếu mặt phẳng đi qua tâm (gọi *là đường tròn lớn*).
   - Đường tròn có bán kính nhỏ hơn R nếu mặt phẳng không đi qua tâm.
3. Diện mặt cầu được tính theo công thức: $S = 4\pi R^2$.
4. Thể tích của hình cầu được tính theo công thức: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Cho hình cầu có bán kính* $R = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$.

a. *Tính diện tích mặt cầu.*

b. *Tính thể tích của khối cầu tương ứng.*

Giải

a. Ta có: $S = 4\pi\left(\frac{5a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 50\pi a^2$.

b. Ta có: $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{5a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{125a^3\sqrt{2}}{3}$.

Ví dụ 2: (Bài 36/tr 124 – Sgk): *Một chi tiết máy gồm một hình trụ và hai nửa hình cầu với kích thước đã cho trên hình* 111 *(đơn vị:* cm).

a. *Tìm một hệ thức giữa* x *và* h *khi* AA' *có độ dài không đổi và bằng* 2a.

b. *Với điều kiện ở câu* a), *hãy tính diện tích bề mặt và thể tích của chi tiết máy theo* x *và* a.

Giải

a. Bán kính hình cầu là x. Ta có:

$AA' = h + 2x \Rightarrow 2a = h + 2x \Rightarrow y = 2a - 2x$

b. Diện tích hình trụ $2\pi xh = 4\pi(a - x)x$

Diện tích hai nửa mặt cầu $4\pi x^2$

Diện tích bề mặt chi tiết máy $4\pi(a - x)x + 4\pi x^2 = 4\pi ax$.

Thể tích phần hình trụ $V_1 = \pi x^2 h = 2\pi x^2(a - x)$

Thể tích 2 nửa hình cầu $V_2 = \frac{4}{3}\pi x^3$.

Thể tích chi tiết máy $V_1 + V_2 = 2\pi x^2(a - x) + \frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{2}{3}\pi x^3(3a - 1)$.

Ví dụ 3: (Bài 36/tr 124 – Sgk): *Cho hình vuông* ABCD *nội tiếp đường tròn tâm* O, *bán kính* R *và* GEF *là tam giác đều nội tiếp đường tròn đó,* EF *là dây song song với* AB. *Cho hình đó quay xung quanh trục* GO. *Chứng minh rằng*:

a. *Bình phương thể tích của hình trụ sinh ra bởi hình vuông bằng tích của thể tích hình cầu sinh ra bởi hình tròn và thể tích hình nón do tam giác đều sinh ra.*

b. *Bình phương diện tích toàn phần của hình trụ bằng tích của diện tích hình cầu và diện tích toàn phần của hình nón.*

Giải – Học sinh tự vẽ hình

a. Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp, ta có:

- Cạnh hình vuông: $AB = AD = r\sqrt{2}$.
- Cạnh tam giác đều: $EF = r\sqrt{3}$.

Khi quay xung quanh OG, hình vuông tạo thành một hình trụ có:

- Bán kính đáy: $R = \frac{1}{2}AB = \frac{r\sqrt{2}}{2}$.
- Chiều cao: $h = AD = r\sqrt{2}$.
- Thể tích: $V_1 = \pi.\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2.r\sqrt{2} = \frac{\pi r^3\sqrt{2}}{2}$.

Khi quay xung quanh OG, ΔGEF tạo thành một hình nón có:

- Bán kính đáy: $R' = \frac{1}{2}EF = \frac{r\sqrt{3}}{2}$
- Chiều cao: $h' = r\sqrt{3}$.
- Thể tích: $V_2 = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2.\frac{3r}{2} = \frac{3}{8}\pi r^3$.

Khi quay xung quanh OG, hình tròn tạo thành một hình cầu có $V_3 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Ta có:

$$V_1^2 = \left(\frac{\pi r^3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2 r^6}{2}, \quad (1)$$

$$V_2.V_3 = \frac{3}{8}\pi r^3.\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi^2 r^6}{2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $V_1^2 = V_2.V_3$.

b. Tương tự, ta có diện tích toàn phần của hình trụ: $S_1 = 3\pi$.

Diện tích toàn phần hình nón: $S_2 = \frac{9}{4}\pi r^2$.

Diện tích mặt cầu: $S_3 = 4\pi r^2$.

Từ đó, ta có:

$$S_1^2 = (3\pi r^2)^2 = 9\pi^2 r^4;\ S_2.S_3 = \frac{9}{4}\pi r^2.4\pi r^2 = 9\pi^2 r^4.$$

Vậy, ta thấy $S_1^2 = S_2.S_3$.

C. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. (Bài 31/tr 125 – Sgk): Hãy điền voà ô trống ở bảng sau:

Bán kính hình cầu	0,3mm	6,21dm	0,283m	100km	6hm	50dam
Diện tích mặt cầu						
Thể tích hình cầu						

Bài 2. Cho hình cầu có bán kính $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính diện tích của mặt cầu và thể tích của hình cầu.

Bài 3. Cho một hình cầu bán kính R, một hình nón nội tiếp trong hình cầu có chiều cao là x ($0 < x < 2R$).

a. Tính thể tích V và diện tích xung quanh S của hình nón.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa V, S, R độc lập đối với x.

c. Với giá trị nào của x thì V lớn nhất ?

D. HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

Bài 1: Ta có bảng kết quả:

r	0,3mm	6,21dm	0,283m	100km	6hm	50dam
S	$0,36\pi$ mm^2	$154,26\pi$ dm^2	$0,32\pi$ m^2	40000π	144π	10000π
V	$0,036\pi$ mm^2	$319,31\pi$ dm^2	$0,03\pi$ m^2	1333333π	288π	166667π

Bài 2: a. $S = 2\pi a^2$; b. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Bài 3: a. $\frac{1}{3}\pi x^2(2R - x)$; b. $S = \pi x\sqrt{2R(2R - x)}$; c. $S^2 = 6\pi RV$; d. $x = \frac{4R}{3}$.

MỤC LỤC

PHẦN ĐẠI SỐ

CHƯƠNG III. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN SỐ

Chủ đề 1: Phương trình bậc nhất hai ẩn số 5
Chủ đề 2: Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn số 14
Chủ đề 3: Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế 25
Chủ đề 4: Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng 39
Chủ đề 5: Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình 53

CHƯƠNG IV. HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN SỐ

Chủ đề 1: Hàm số $y = ax^2$, $a \neq 0$ 74
Chủ đề 2: Đồ thị của hàm số $y = ax^2$, $a \neq 0$ 79
Chủ đề 3: Phương trình bậc hai một ẩn số 88
Chủ đề 4: Công thức nghiệm của phương trình bậc hai 98
Chủ đề 5: Hệ thức Vi–ét và các ứng dụng 121
Chủ đề 6: Phương trình quy về phương trình bậc hai 161
Chủ đề 7: Giải bài toán bằng cách lập phương trình 195

PHẦN HÌNH HỌC

CHƯƠNG III. GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

Chủ đề 1: Góc ở tâm – Số đo cung 196
Chủ đề 2: Liên hệ giữa cung và dây 201
Chủ đề 3: Góc nội tiếp 206
Chủ đề 4: Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung 216
Chủ đề 5: Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn – Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn 224
Chủ đề 6: Cung chứa góc 231
Chủ đề 7: Tứ giác nội tiếp 250
Chủ đề 8: Đường tròn ngoại tiếp – Đường tròn nộii tiếp 261
Chủ đề 9: Độ dài đường tròn, cung tròn 268
Chủ đề 10: Diện tích hình tròn, hình quạt tròn 272

CHƯƠNG IV. HÌNH TRỤ – HÌNH NÓN – HÌNH CẦU

Chủ đề 1: Hình trụ – Diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ 277
Chủ đề 2: Hình nón – Hình nón cụt
Diện tích xung quanh và thể tích của hình nón, hình nón cụt 280
Chủ đề 3: Hình cầu – Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu 285